UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Física

Mecânica Fundamental

Novembro de 2013

Conteúdo

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais — Vetores

Em qualquer teoria científica, e em mecânica em particular, é necessário começar com certos conceitos primitivos. Necessitaremos também fazer um certo número de suposições razoáveis. Dois dos conceitos mais básicos são **espaço** e **tempo**. No nosso estudo inicial da ciência do movimento, mecânica, vamos supor que o espaço físico das experiências comuns é descrito adequadamente pelo espaço matemático tridimensional da geometria euclidiana. E em relação ao conceito de tempo, vamos supor que uma sequência ordenada de acontecimentos pode ser medida numa escala de tempo absoluta e uniforme. Vamos supor ainda que o espaço e tempo são entidades distintas e independentes. Mais tarde, quando estudarmos a teoria da relatividade, reexaminaremos os conceitos de espaço e de tempo e veremos que eles não são independentes e nem absolutos. Porém, isto é um assunto ao qual retornaremos depois de estudarmos os fundamentos clássicos da mecânica.

Para definir a posição de um corpo no espaço, é necessário ter um sistema de referência. Em mecânica, usamos um sistema de coordenadas. O tipo básico de sistema de coordenadas que satisfaz aos nossos propósitos é o Sistema de Coordenadas Cartesianas ou retangulares, um conjunto de três linhas retas ou eixos mutuamente perpendiculares. Especificaremos a posição de um ponto em tal sistema através de três números ou coordenadas, x, y, e z. As coordenadas de um ponto móvel mudam com o tempo, isto é, elas são funções da quantidade t medida na nossa escala de tempo.

Um conceito muito útil em mecânica é o de partícula ou ponto de massa, uma entidade que tem massa (o conceito de massa será discutido no capítulo 2), mas não tem extensão espacial. Rigorosamente falando a partícula é uma idealização que não existe – mesmo um elétron tem um tamanho finito – mas a ideia é útil como uma aproximação de um corpo pequeno, ou seja, um corpo cujo tamanho seja relativamente sem importância numa discussão particular. A Terra, por exemplo, pode ser tratada como uma partícula em mecânica celeste.

1.1 Grandezas Físicas e Unidades

Os resultados experimentais da física são expressos em termos de certas entidades fundamentais chamadas grandezas físicas – por exemplo, comprimento, tempo, força e outras. Uma grandeza física é algo que pode ser medido quantitativamente em relação a alguma unidade escolhida. Quando dizemos que o comprimento de um certo objeto é, digamos 7 polegadas,

queremos dizer que a medida quantitativa 7 é a relação (razão) do comprimento daquele objeto para o comprimento da unidade (1 polegada). Observamos que é possível definir todas as unidades das grandezas físicas da mecânica em termos de apenas três unidades básicas, ou seja comprimento, massa e tempo.

A UNIDADE DE COMPRIMENTO

A unidade padrão de comprimento é o *metro*. O metro era anteriormente definido como a distância entre duas marcas numa barra de platina guardada no Museu Internacional de Padrões Métricos, Sèvres, França. Atualmente definimos o metro como a distância ocupada por exatamente 1.650.763,73 comprimentos de onda de luz da linha laranja do isótopo Kriptonio 86.

A UNIDADE DE MASSA

A unidade padrão de massa é o quilograma. O quilograma é a massa de um bloco de platina-irídio também guardada no Museu Internacional.

A UNIDADE DE TEMPO

A unidade básica para a medida de tempo, o segundo, era anteriormente definida em termos da rotação da Terra. Mas, como o metro, o segundo é atualmente definido em termos de um padrão atômico específico. O segundo é, por definição, o intervalo de tempo necessário para exatamente 9.192.631,770 oscilações de uma transição atômica particular do isótopo do Césio de número de massa 133.

O sistema de unidades acima é chamado de sistema MKS. (Neste sistema existe uma quarta unidade, o Coulomb, que é usado para definir unidades elétricas). Os padrões atômicos modernos de comprimento e tempo neste sistema não são apenas mais precisos do que os padrões anteriores, mas são também universalmente reproduzíveis e indestrutíveis. Infelizmente, ainda não é no presente tecnicamente factível empregar um padrão atômico de massa.

Na verdade, não existe nada particularmente especial a respeito das quantidades físicas comprimento, massa e tempo como um conjunto básico para definir unidades. Outros conjuntos de quantidades físicas podem ser usados. Os chamados sistemas gravitacionais usam comprimento, força e tempo.

Além do sistema MKS, existem outros sistemas em uso comum, ou seja, o CGS, ou sistema centímetro-grama-segundo, e o PLS, ou pé-libra-segundo. Estes dois últimos sistemas podem ser vistos como secundários com relação ao sistema MKS porque suas unidades são especificamente frações definidas das unidades MKS:

1 cm = 10^{-2} m
1 g = 10^{-3} kg
1 pé = 0,3048 m
1 libra = 0,4536 kg

1.2 Grandezas Escalares e Vetoriais

Uma grandeza física que fica completamente especificada por um único número é chamada um *escalar*. Exemplos familiares de escalares são densidade, volume e temperatura. Matematicamente, escalares são tratados como números reais comuns. Eles obedecem a todas as regras algébricas regulares de adição, subtração, multiplicação, divisão e assim por diante.

Existem certas grandezas físicas que possuem uma característica direcional, como um deslocamento de um ponto para outro do espaço. Tais grandezas necessitam uma direção, sentido e um módulo para as suas completas especificações. Estas grandezas são chamadas *vetores* se elas obedecem a regra da adição do paralelogramo como será discutido na seção 1.7. (Um exemplo de uma grandeza direcional que não obedece a regra para adição é uma rotação finita de um objeto em torno de um dado eixo. O leitor pode prontamente verificar que duas rotações sucessivas em torno de eixos diferentes não produzem o mesmo efeito que uma única rotação determinada pela regra do paralelogramo. Por ora, todavia não examinaremos tais grandezas direcionais não vetoriais). Além de deslocamento no espaço, outros exemplos familiares de vetores são velocidade, aceleração e força. O conceito de vetor e o desenvolvimento de toda uma matemática de quantidades vetoriais tem sido indispensável ao desenvolvimento da ciência da Mecânica. O resto deste capítulo será em sua maior parte voltada a um estudo da matemática de vetores.

1.3 Notação

Quantidades vetoriais são representadas em imprensa por tipo em negrito, por exemplo **A**, enquanto tipo itálico representa quantidades escalares. Em trabalho manuscrito é costume usar uma flecha, $\vec{\mathrm{A}}$, para representar um vetor.

Especificamos um vetor $\vec{\mathrm{A}}$ por seu módulo, sua direção e sentido em relação a algum sistema de referência escolhido. Diagramaticamente, representamos um vetor por um segmento de linha direcionada, como mostrado na Figura 1.1.

Um vetor pode também ser especificado relacionando-se suas componentes ou projeções sobre os eixos coordenados. O símbolo de componentes $[A_x,\ A_y,\ A_z]$ será usado como uma representação alternativa de um vetor. O lado direito da equação $\vec{\mathrm{A}} = [A_x,\ A_y,\ A_z]$ exprime o vetor $\vec{\mathrm{A}}$ em termos de suas componentes num sistema de coordenadas particular. (Consideremos subentendido o uso do sistema de coordenadas cartesianas, a menos que seja dito o contrário). Por exemplo, se o vetor $\vec{\mathrm{A}}$ representa um deslocamento de um ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ até o ponto $P_2(x_2, y_2, z_2)$, então $A_x = x_2 - x_1$, $A_y = y_2 - y_1$, $A_z = z_2 - z_1$. Se $\vec{\mathrm{A}}$ representa uma força então A_x é a componente x da força, e assim por diante. Evidentemente, os valores numéricos das componentes escalares de um dado vetor dependem da escolha dos eixos coordenados.

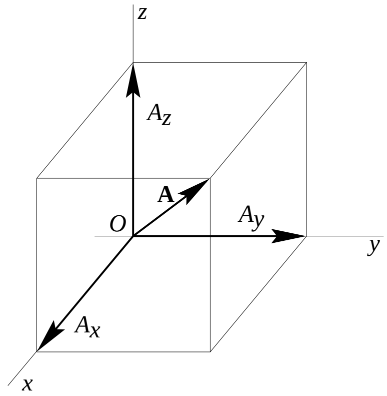


Figura 1.1: Componentes de um vetor em coordenadas cartesianas.

Restringindo a discussão a vetores contidos num plano, somente duas componentes são necessárias. Por outro lado, podemos definir um espaço matemático de qualquer número de dimensões. Então o símbolo $[A_1,\, A_2,\, A_3,\, \ldots,\, A_n]$ representa um vetor n–dimensional. Neste sentido abstrato um vetor é um conjunto ordenado de números.

1.4 Definições Formais e Regras

Começamos o estudo da álgebra vetorial com algumas definições formais sobre vetores.

1. Igualdade de Vetores

A equação $\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{B}}$ ou

$$[A_x,\, A_y,\, A_z] = [B_x,\, B_y,\, B_z]$$

é equivalente às três equações

$$A_x = B_x \qquad A_y = B_y \qquad A_z = B_z$$

Isto é, dois vetores são iguais se, e somente se, suas respectivas componentes forem iguais.

2. Adição de Vetores

A adição de dois vetores é definida pela equação

$$\vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{B}} = [A_x,\, A_y,\, A_z] + [B_x,\, B_y,\, B_z] = [A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z]$$

A soma de dois vetores é um vetor cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados.

3. Multiplicação por um Escalar

Se c é um escalar e $\vec{\mathrm{A}}$ é um vetor,

$$c\vec{\mathrm{A}} = c[A_x,\ A_y,\ A_z] = [cA_x, cA_y, cA_z] = \vec{\mathrm{A}}c$$

O produto $c\vec{\mathrm{A}}$ é um vetor cujas componentes são c vezes aquelas de $\vec{\mathrm{A}}$.

4. Subtração de Vetores

Subtração é definida como se segue:

$$\vec{\mathrm{A}} - \vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{A}} + (-1)\vec{\mathrm{B}} = [A_x - B_x, A_y - B_y, A_z - B_z]$$

5. O Vetor Nulo

O vetor $\vec{0} = [0, 0, 0]$ é chamado de vetor nulo. A direção e sentido do vetor nulo não são definidas. De (4) segue-se que $\vec{\mathrm{A}} - \vec{\mathrm{A}} = \vec{0}$. Desde que não haja confusão quando o vetor nulo for representado por um "*zero*", usaremos daqui para a frente a notação $\vec{0} = 0$.

6. A Lei Comutativa da Adição

Esta lei é válida para vetores; isto é,

$$\vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{B}} + \vec{\mathrm{A}}$$

desde que $A_x + B_x = B_x + A_x$, e da mesma forma para as componentes y e z.

7. A Lei Associativa

A lei associativa é também verdadeira, porque

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{A}} + (\vec{\mathrm{B}} + \vec{\mathrm{C}}) &= [A_x + (B_x + C_x), A_y + (B_y + C_y), A_z + (B_z + C_z)] \\ &= [(A_x + B_x) + C_x, (A_y + B_y) + C_y, (A_z + B_z) + C_z] \\ &= (\vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{B}}) + \vec{\mathrm{C}}\end{aligned}$$

8. A Lei Distributiva

A lei distributiva é válida na multiplicação de um vetor por um escalar porque, de (2) e (3)

$$\begin{aligned}c(\vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{B}}) &= c[A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z] \\ &= [c(A_x + B_x), c(A_y + B_y), c(A_z + B_z)] \\ &= [cA_x + cB_x, cA_y + cB_y, cA_z + cB_z] \\ &= c\vec{\mathrm{A}} + c\vec{\mathrm{B}}\end{aligned}$$

Então os vetores obedecem as regras da álgebra ordinária enquanto estivermos considerando as operações acima.

1.5 Módulo de um Vetor

O módulo de um vetor $\vec{A}$, representado por $|\vec{A}|$ ou por A, é definido como a raiz quadrada da soma dos quadrados das componentes, ou seja,

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.1}$$

Geometricamente o módulo de um vetor é seu comprimento, isto é, o comprimento da diagonal do paralelepípedo retangular cujos lados são A_x, A_y e A_z.

1.6 Vetores Unitários

Um vetor unitário é um vetor cujo módulo é unitário. Vetores unitários são frequentemente representados pelo símbolo $\vec{e}$ da palavra alemã *einheit*. Os três vetores

$$\vec{e}_x = [1, 0, 0] \qquad \vec{e}_y = [0, 1, 0] \qquad \vec{e}_z = [0, 0, 1] \tag{1.2}$$

são chamados *vetores unitários* ou *vetores base*. Qualquer vetor pode ser expresso em termos de vetores base como uma soma vetorial de componentes como se segue:

$$\begin{aligned} \vec{A} = [A_x, A_y, A_z] &= [A_x, 0, 0] + [0, A_y, 0] + [0, 0, A_z] \\ &= A_x[1, 0, 0] + A_y[0, 1, 0] + A_z[0, 0, 1] \\ &= \vec{e}_x A_x + \vec{e}_y A_y + \vec{e}_z A_z \end{aligned} \tag{1.3}$$

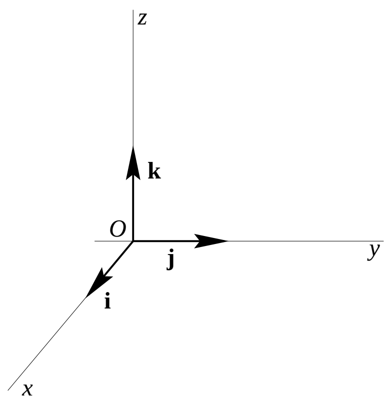


Figura 1.2: Os vetores coordenados unitários $\vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,\vec{k}$.

Uma notação amplamente usada para vetores unitários Cartesianos são as letras $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ e $\vec{k}$, ou seja

$$\vec{\imath} = \vec{e}_x \qquad \vec{\jmath} = \vec{e}_y \qquad \vec{k} = \vec{e}_z$$

Daqui para a frente usaremos sempre essa notação.

As direções dos vetores unitários são definidas pelos eixos coordenados (Figura 1.2). Eles formam uma tríade orientada pela regra da mão direita ou pela mão esquerda, dependendo de qual sistema de coordenadas é usado. É costume usar sistemas coordenados orientado de acordo com a mão direita. O sistema mostrado na Figura 1.2 é orientado de acordo com a mão direita.

1.7 Significado Geométrico das Operações Vetoriais

Se representarmos um vetor por um segmento de linha orientado, interpretaremos facilmente as definições enunciadas acima como se segue:

1. Igualdade de Vetores

Se dois vetores são iguais então os vetores são paralelos e têm o mesmo comprimento, mas não têm necessariamente a mesma posição. A Figura 1.3, bidimensional para maior clareza, mostra dois vetores iguais.

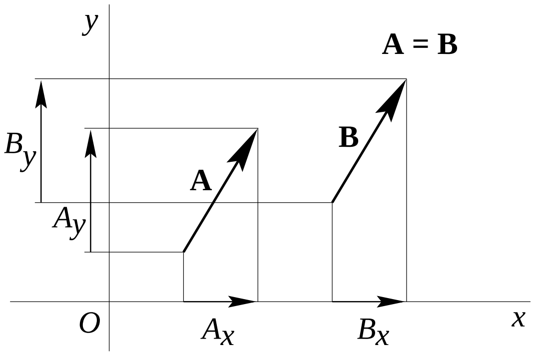


Figura 1.3: Ilustrando igualdade de vetores.

Observe que os vetores formam lados opostos de um paralelogramo. (Vetores iguais não são necessariamente equivalentes em todos os casos. Então duas forças vetorialmente iguais atuando em diferentes pontos de um objeto podem produzir diferentes efeitos mecânicos).

2. Adição de Vetores

A soma vetorial de dois vetores é igual ao terceiro lado de um triângulo, dois lados do qual são os vetores dados. A soma vetorial está ilustrada na Figura 1.4. A soma é dada também pela regra do paralelogramo, como mostrado na Figura. (A soma vetorial é definida de acordo com a definição dada na seção 1.4 (2), mesmo se os vetores não têm um ponto comum).

3. Multiplicação de um Vetor por um Escalar

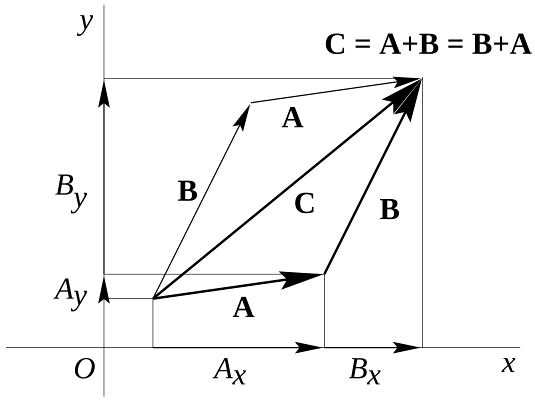


Figura 1.4: Adição de dois vetores.

O vetor $c\vec{A}$ é paralelo a $\vec{A}$ e tem c vezes o comprimento de $\vec{A}$. Quando $c = -1$, o vetor $-\vec{A}$ tem a mesma direção e sentido oposto a $\vec{A}$, como mostrado na Figura 1.5.

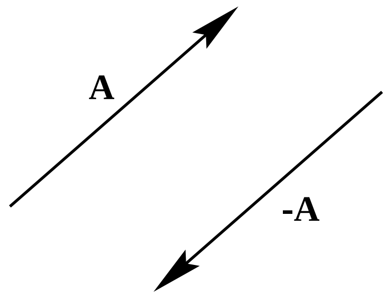


Figura 1.5: O negativo de um vetor.

1.8 O Produto Escalar

Dado dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ o produto escalar ou produto interno, $\vec{A}\,.\,\vec{B}$, é o escalar definido pela equação

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.4}$$

Segue-se dessa definição que

$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = \vec{B}\,.\,\vec{A} \tag{1.5}$$

Desde que $A_xB_x = B_xA_x$ e assim por diante. Segue-se também que

$$\vec{A}\,.\,(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}\,.\,\vec{B} + \vec{A}\,.\,\vec{C} \tag{1.6}$$

porque se aplicarmos a definição (1.4) em detalhes

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot (\vec{B}+\vec{C}) &= A_x(B_x+C_x)+A_y(B_y+C_y)+A_z(B_z+C_z)\\ &= A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z+A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\\ &= \vec{A} \cdot \vec{B}+\vec{A} \cdot \vec{C}\end{aligned}$$

Da geometria analítica lembramos a fórmula para o cosseno do ângulo entre dois segmentos de linha

$$\cos\theta = \frac{A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}$$

Usando as equações (1.1) e (1.4), a fôrmula acima pode ser escrita

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

ou

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta \tag{1.7}$$

A equação acima pode ser vista como uma definição alternativa do produto escalar. Geometricamente, $\vec{A} \cdot \vec{B}$ é igual ao comprimento da projeção de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$, vezes o comprimento de $\vec{B}$.

Se o produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ é nulo, então $\vec{A}$ é perpendicular a $\vec{B}$, desde que nem $\vec{A}$ nem $\vec{B}$ sejam nulos.

O quadrado do módulo de um vetor $\vec{A}$ é dado pelo produto escalar de $\vec{A}$ com ele mesmo,

$$A^2 = |\vec{A}|^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$$

Das definições dos vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, fica clara a validade das seguintes relações

$$\begin{aligned}\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} &= 1\\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} &= 0\end{aligned} \tag{1.8}$$

1.9 Alguns Exemplos do Produto Escalar

1. Componente de um Vetor. Trabalho

Como exemplo de um produto escalar, suponha que um objeto sob a ação de uma força constante (o conceito de força será discutido mais tarde no Capítulo 2), sofre um deslocamento linear $\Delta\vec{S}$, como é mostrado na Figura 1.6. Por definição, o *trabalho* ΔW realizado pela força é dado pelo produto da componente da força $\vec{F}$ na direção $\Delta\vec{S}$, multiplicado pelo módulo ΔS do deslocamento, isto é,

$$\Delta W = (F\cos\theta)\Delta S$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{F}$ e $\Delta\vec{S}$, isto é,

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{S}$$

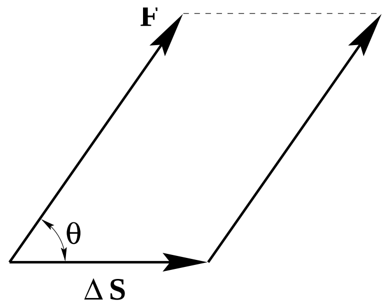


Figura 1.6: Uma força submetida a um deslocamento.

2. Lei dos Cossenos

Consideremos um triângulo cujos lados são $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$, como mostrado na Figura 1.7. Então $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. Vamos fazer o produto escalar de $\vec{C}$ com ele mesmo

$$\begin{aligned}\vec{C}\;.\;\vec{C} &= (\vec{A}+\vec{B})\;.\;(\vec{A}+\vec{B}) \\ &= \vec{A}\;.\;\vec{A} + 2\vec{A}\;.\;\vec{B} + \vec{B}\;.\;\vec{B}\end{aligned}$$

A segunda passagem segue-se da aplicação das regras nas equações (1.5) e (1.6). Vamos substituir $\vec{A}\;.\;\vec{B}$ por $AB\cos\theta$ para obter

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$

que é a conhecida lei dos cossenos. Este é apenas um dos exemplos do uso da álgebra vetorial para provar teoremas em geometria.

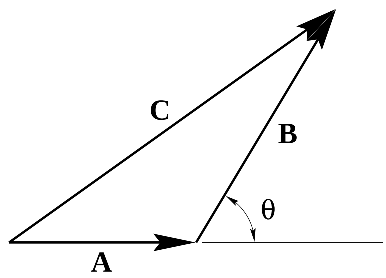


Figura 1.7: A lei dos cossenos.

1.10 O Produto Vetorial

Dado dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$, o produto vetorial $\vec{A} \times \vec{B}$, é definido pelo vetor cujas componentes são dadas pela equação

$$\vec{A} \times \vec{B} = [A_yB_z - A_zB_y, A_zB_x - A_xB_z, A_xB_y - A_yB_x] \tag{1.9}$$

A interpretação geométrica do produto vetorial é dada na seção 1.11. Podemos mostrar que as seguintes regras se aplicam para a multiplicação vetorial.

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = -\vec{\mathrm{B}} \times \vec{\mathrm{A}} \tag{1.10}$$

$$\vec{\mathrm{A}} \times (\vec{\mathrm{B}} + \vec{\mathrm{C}}) = \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} + \vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{C}} \tag{1.11}$$

$$n(\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}) = n(\vec{\mathrm{A}}) \times \vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{A}} \times n(\vec{\mathrm{B}}) \tag{1.12}$$

As provas destas relações decorrem diretamente das definições e vamos deixá-las como exercício.

De acordo com as definições algébricas dos vetores unitários, Equação (1.2), verificamos imediatamente que as seguintes relações para os produtos vetoriais são verdadeiras:

$$\begin{aligned} \vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{\mathrm{k}} \times \vec{\mathrm{k}} = 0 \\ \vec{\jmath} \times \vec{\mathrm{k}} = \vec{\imath} = -\vec{\mathrm{k}} \times \vec{\jmath} \\ \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{\mathrm{k}} = -\vec{\jmath} \times \vec{\imath} \\ \vec{\mathrm{k}} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} = -\vec{\imath} \times \vec{\mathrm{k}} \end{aligned} \tag{1.13}$$

Por exemplo

$$\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = [0 - 0, 0 - 0, 1 - 0] = [0, 0, 1] = \vec{\mathrm{k}}$$

De maneira idêntica verificamos facilmente as outras relações.

1.11 Interpretação Geométrica do Produto Vetorial

O produto vetorial expresso em termos dos unitários $\vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,\vec{\mathrm{k}}$ é

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \vec{\imath}(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{\jmath}(A_z B_x - A_x B_z) + \vec{\mathrm{k}}(A_x B_y - A_y B_x)$$

cada termo entre parênteses é igual a um determinante

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \vec{\imath} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} + \vec{\jmath} \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} + \vec{\mathrm{k}} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

e finalmente

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\mathrm{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

que é prontamente verificada pelo desenvolvimento.

A forma determinante é uma ajuda conveniente para se lembrar a definição de produto vetorial. Das propriedades de determinante pode-se ver que se $\vec{\mathrm{A}}$ é paralelo a $\vec{\mathrm{B}}$, isto é, se $\vec{\mathrm{A}} = c\vec{\mathrm{B}}$ então as duas últimas linhas do determinante são proporcionais e logo o determinante é nulo. Então o produto vetorial de dois vetores paralelos é nulo.

Vamos calcular o módulo do produto vetorial. Temos

$$|\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}|^2 = (A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2$$

Com um pouco de paciência podemos reduzir esta expressão a

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2$$

ou usando a definição de produto escalar, a equação acima pode ser colocada na forma

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 = A^2 B^2 - (\vec{A} \, . \, \vec{B})^2$$

Tomando a raiz quadrada de ambos os lados da equação acima e usando a Equação (1.7), podemos expressar o módulo do produto vetorial como

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\sqrt{1 - \cos^2\theta} = AB \operatorname{sen}\theta \tag{1.15}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

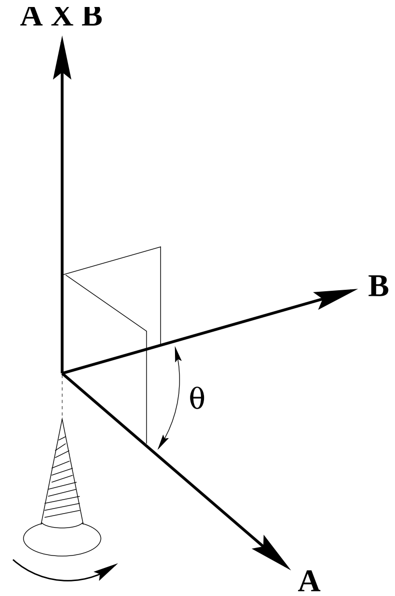


Figura 1.8: O produto vetorial.

Para interpretar geometricamente o produto vetorial, observamos que o vetor $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ é perpendicular a ambos $\vec{A}$ e $\vec{B}$, pois

$$\begin{aligned} \vec{A} \, . \, \vec{C} &= A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z \\ &= A_x(A_y B_z - A_z B_y) + A_y(A_z B_x - A_x B_z) + A_z(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da mesma forma $\vec{B} \, . \, \vec{C} = 0$. Então o vetor $\vec{C}$ é perpendicular ao plano que contém os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

O sentido do vetor $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ é determinado a partir da condição de que os três vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ formem uma tríade "orientada de acordo com a mão direita", como mostrado na Figura 1.8. (Isto está consistente com o resultado previamente estabelecido de que na tríade

orientada de acordo com a mão direita $\vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,\vec{k}$ temos $\vec{\imath}\times\vec{\jmath}=\vec{k}$). Consequentemente, da equação (1.15) vemos que podemos escrever

$$\vec{A}\times\vec{B}=(AB\,\mathrm{sen}\,\theta)\vec{n} \tag{1.16}$$

Onde $\vec{n}$ é um vetor unitário normal ao plano dos dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. O sentido de $\vec{n}$ é dado pela regra da mão direita, isto é, a direção de avanço de um parafuso de rosca direita girando da posição positiva de $\vec{A}$ para a de $\vec{B}$ através do menor ângulo entre eles, como está ilustrado na Figura 1.8. A Equação (1.16) pode ser entendida como uma definição alternativa do produto vetorial.

Exemplos

1. Dados os dois vetores $\vec{A}=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}-\vec{k}$, $\vec{B}=\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$, encontre $\vec{A}\,.\,\vec{B}$ e $\vec{A}\times\vec{B}$.

$$\vec{A}\,.\,\vec{B}=(2)(1)+(1)(-1)+(-1)(2)=2-1-2=-1$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\vec{\imath}(2-1)+\vec{\jmath}(-1-4)+\vec{k}(-2-1)=\vec{\imath}-5\vec{\jmath}-3\vec{k}$$

2. Encontre o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Temos, da definição de produto escalar,

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}\,.\,\vec{B}}{AB}=\frac{-1}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=-\frac{1}{6}$$

Logo $\theta=\arccos(-\frac{1}{6})=99,6°$.

1.12 Um Exemplo do Produto Vetorial. Momento de uma Força

A representação dos momentos constitui uma aplicação útil do produto vetorial. Consideremos uma força $\vec{F}$ atuando em um ponto $P(x,y,z)$, como mostrado na Figura 1.9, e vamos representar o vetor OP por $\vec{r}$, isto é

$$\vec{OP}=\vec{r}=r_x\vec{\imath}+r_y\vec{\jmath}+r_z\vec{k}$$

o momento $\vec{N}$, ou o *Torque*, em relação a um dado ponto O é definido como o produto vetorial

$$\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F} \tag{1.17}$$

Então o momento de uma força em relação a um ponto é uma quantidade vetorial tendo módulo, direção e sentido. Se uma única força for aplicada em um ponto P de um corpo livre para girar em torno de um ponto fixo O como um pivot, então o corpo tende a girar. O eixo desta rotação é perpendicular à força $\vec{F}$, e é também perpendicular à linha OP. Dessa maneira a direção e sentido do torque será ao longo do eixo de rotação.

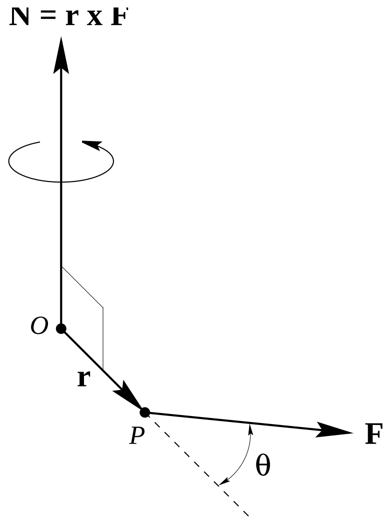


Figura 1.9: O momento de uma Força.

O módulo do torque é dado por

$$|\vec{\mathrm{N}}| = |\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}}| = rF\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{1.18}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{\mathrm{r}}$ e $\vec{\mathrm{F}}$. Logo $|\vec{\mathrm{N}}|$ pode ser visto como o produto do módulo da força pela quantidade $r\,\mathrm{sen}\,\theta$ que é exatamente a distância perpendicular da linha de ação da força ao ponto O.

Quando várias forças são aplicadas a um único corpo em pontos diferentes os momentos se somam vetorialmente. Isto decorre da lei distributiva de multiplicação vetorial, Equação (1.11). A condição para equilíbrio de rotação é que a soma vetorial de todos os momentos seja zero:

$$\sum_i (\vec{\mathrm{r}}_i \times \vec{\mathrm{F}}_i) = \sum_i \vec{\mathrm{N}}_i = 0$$

Uma discussão mais completa disto será dado mais tarde no Capítulo 5.

1.13 Representação de um dado Vetor em Termos do Produto de um Escalar e um Único Vetor Unitário

Consideremos a equação

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_x + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z$$

vamos multiplicar e dividir o lado direito pelo módulo de $\vec{A}$

$$\vec{A} = A\left(\vec{\imath}\frac{A_x}{A} + \vec{\jmath}\frac{A_y}{A} + \vec{k}\frac{A_z}{A}\right)$$

Agora $\frac{A_x}{A} = \cos\alpha$, $\frac{A_y}{A} = \cos\beta$ e $\frac{A_z}{A} = \cos\gamma$ são os cossenos diretores do vetor $\vec{A}$ e α, β e γ são os ângulos de direção. Então podemos escrever

$$\vec{A} = A(\vec{\imath}\cos\alpha + \vec{\jmath}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma) = A[\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$$

ou

$$\vec{A} = A\vec{n} \tag{1.19}$$

onde $\vec{n}$ é um vetor unitário cujos componentes são $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$.

Considere qualquer outro vetor $\vec{B}$. Sem dúvida, a projeção de $\vec{B}$ em $\vec{A}$ é exatamente

$$B\cos\theta = \frac{\vec{B}\ .\ \vec{A}}{A} = \vec{B}\ .\ \vec{n} \tag{1.20}$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

Exemplo

Encontre um vetor unitário perpendicular ao plano que contém os dois vetores $\vec{A} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ e $\vec{B} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$

Do exemplo 1, temos

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$

logo

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \frac{\vec{\imath}-5\vec{\jmath}-3\vec{k}}{\sqrt{1^2+5^2+3^2}} \\ &= \frac{\vec{\imath}}{\sqrt{35}} - \frac{5\vec{\jmath}}{\sqrt{35}} - \frac{3\vec{k}}{\sqrt{35}} \end{aligned}$$

1.14 Produtos Triplos

A expressão

$$\vec{A}\ .\ (\vec{B} \times \vec{C})$$

é chamada triplo produto escalar de $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$. É um escalar desde que é o produto escalar de dois vetores. Lembrando-se da expressão em forma de determinante do produto vetorial, Equação (1.14), vemos que o triplo produto escalar pode ser escrito

$$\vec{A}\ .\ (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \tag{1.21}$$

Usando a conhecida propriedade de determinantes de que a troca de termos de duas linhas ou de duas colunas muda o sinal mas não muda o valor absoluto do determinante, podemos obter a seguinte expressão bastante útil:

$$\vec{A} \ . \ (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \ . \ \vec{C} \tag{1.22}$$

A expressão

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$$

é chamada Triplo Produto Vetorial. Deixamos o leitor provar que a seguinte equação é válida para o triplo produto vetorial

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \ . \ \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \ . \ \vec{B})\vec{C} \tag{1.23}$$

1.15 Mudança de Sistema de Coordenadas. A Matriz Transformação

Consideremos o vetor $\vec{A}$ representado pela tríade $\vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,\vec{k}$,

$$\vec{A} = \vec{\imath}A_x + \vec{\jmath}A_y + \vec{k}A_z$$

relativamente a uma nova tríade $\vec{\imath'}\,\vec{\jmath'}\,\vec{k'}$ tendo orientação diferente daquela de $\vec{\imath}\,\vec{\jmath}\,\vec{k}$, o mesmo vetor $\vec{A}$ é representado por

$$\vec{A} = \vec{\imath'}A_{x'} + \vec{\jmath'}A_{y'} + \vec{k'}A_{z'}$$

Mas o produto escalar $\vec{A} \ . \ \vec{\imath'}$ é exatamente $A_{x'}$, isto é, a projeção de $\vec{A}$ no vetor unitário $\vec{\imath'}$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} A_{x'} = \vec{A} \ . \ \vec{\imath'} &= (\vec{\imath} \ . \ \vec{\imath'})A_x + (\vec{\jmath} \ . \ \vec{\imath'})A_y + (\vec{k} \ . \ \vec{\imath'})A_z \\ A_{y'} = \vec{A} \ . \ \vec{\jmath'} &= (\vec{\imath} \ . \ \vec{\jmath'})A_x + (\vec{\jmath} \ . \ \vec{\jmath'})A_y + (\vec{k} \ . \ \vec{\jmath'})A_z \\ A_{z'} = \vec{A} \ . \ \vec{k'} &= (\vec{\imath} \ . \ \vec{k'})A_x + (\vec{\jmath} \ . \ \vec{k'})A_y + (\vec{k} \ . \ \vec{k'})A_z \end{aligned} \tag{1.24}$$

Os produtos escalares $(\vec{\imath} \ . \ \vec{\imath'})$, $(\vec{\imath} \ . \ \vec{\jmath'})$, e os demais, são chamados de *coeficientes de transformação*. Eles são iguais aos cossenos diretores dos eixos do sistema de coordenadas com linha relativamente ao sistema sem linha. Podemos expressar as componentes sem linha da mesma forma como,

$$\begin{aligned} A_x = \vec{A} \ . \ \vec{\imath} &= (\vec{\imath'} \ . \ \vec{\imath})A_{x'} + (\vec{\jmath'} \ . \ \vec{\imath})A_{y'} + (\vec{k'} \ . \ \vec{\imath})A_{z'} \\ A_y = \vec{A} \ . \ \vec{\jmath} &= (\vec{\imath'} \ . \ \vec{\jmath})A_{x'} + (\vec{\jmath'} \ . \ \vec{\jmath})A_{y'} + (\vec{k'} \ . \ \vec{\jmath})A_{z'} \\ A_z = \vec{A} \ . \ \vec{k} &= (\vec{\imath'} \ . \ \vec{k})A_{x'} + (\vec{\jmath'} \ . \ \vec{k})A_{y'} + (\vec{k'} \ . \ \vec{k})A_{z'} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Todos os coeficientes de transformação na Equação (1.25) também aparecem na Equação (1.24), porque $\vec{\imath} \ . \ \vec{\imath'} = \vec{\imath'} \ . \ \vec{\imath}$, etc., mas aqueles nas linhas (equações) das Equações (1.25) aparecem nas colunas de termos nas Equações (1.24) e ao contrário. As regras de transformação

expressas nestes dois conjuntos de equações são propriedades gerais de vetores. Na verdade, elas constituem uma maneira alternativa de se definir vetores[1].

As equações de transformação são convenientemente expressas em notação matricial. Então a Equação (1.24) é escrita

$$\begin{pmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\imath} \,.\, \vec{\imath}' & \vec{\jmath} \,.\, \vec{\imath}' & \vec{k} \,.\, \vec{\imath}' \\ \vec{\imath} \,.\, \vec{\jmath}' & \vec{\jmath} \,.\, \vec{\jmath}' & \vec{k} \,.\, \vec{\jmath}' \\ \vec{\imath} \,.\, \vec{k}' & \vec{\jmath} \,.\, \vec{k}' & \vec{k} \,.\, \vec{k}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

A matriz 3×3 na equação acima é chamada a matriz transformação. Uma vantagem da notação matricial é que transformações sucessivas são prontamente executadas por meio de multiplicação de matrizes.

O leitor observará que a aplicação de uma dada matriz transformação em um certo vetor $\vec{A}$ é também equivalente formalmente a girar aquele vetor dentro do sistema de coordenadas (fixo) sem linha, as componentes do vetor girado sendo aquelas dadas pela Equação (1.26). Então rotações finitas podem ser representadas por matrizes. (Observe que o sentido de rotação do vetor neste contexto é o oposto do sentido de rotação do sistema de coordenadas no contexto anterior).

Exemplos

1. Escreva o vetor $\vec{A} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$ em termos da tríade $\vec{\imath}'\vec{\jmath}'\vec{k}'$ onde os eixos $x'y'$ estão girados de 45° em torno do eixo z. z e z' são eixos coincidentes, como mostra a Figura 1.10. Baseando-nos na figura, temos para os coeficientes de transformação

$$\begin{array}{lll} \vec{\imath} \,.\, \vec{\imath}' = 1/\sqrt{2} & \vec{\jmath} \,.\, \vec{\imath}' = 1/\sqrt{2} & \vec{k} \,.\, \vec{\imath}' = 0 \\ \vec{\imath} \,.\, \vec{\jmath}' = -1/\sqrt{2} & \vec{\jmath} \,.\, \vec{\jmath}' = 1/\sqrt{2} & \vec{k} \,.\, \vec{\jmath}' = 0 \\ \vec{\imath} \,.\, \vec{k}' = 0 & \vec{\jmath} \,.\, \vec{k}' = 0 & \vec{k} \,.\, \vec{k}' = 1 \end{array}$$

Destas relações tiramos

$$A_{x'} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \qquad A_{y'} = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad A_{z'} = 1$$

Então, no sistema linha, o vetor $\vec{A}$ é dado por

$$\vec{A} = \frac{5}{\sqrt{2}}\vec{\imath}' - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}' + \mathrm{k}'$$

2. Encontre a matriz transformação para uma rotação do sistema de coordenadas linha de um ângulo ϕ em torno do eixo z.
(O exemplo anterior é um caso especial deste). Temos

$$\begin{array}{l} \vec{\imath} \,.\, \vec{\imath}' = \vec{\jmath} \,.\, \vec{\jmath}' = \cos\phi \\ \vec{\jmath} \,.\, \vec{\imath}' = -\vec{\imath} \,.\, \vec{\jmath}' = \operatorname{sen}\phi \\ \vec{k} \,.\, \vec{k}' = 1 \end{array}$$

[1]Veja, por exemplo, L.P. Smith, Mathematical Methods for Scientists and Engineers, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1953.

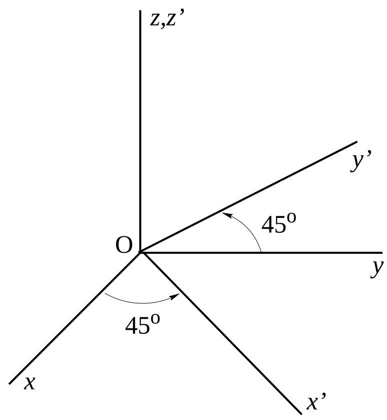


Figura 1.10: O eixo linha $O'x'y'z'$ estão girados de 45° em torno do eixo z.

e todos os outros produtos são nulos. Então a matriz transformação é

$$\begin{vmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

É evidente a partir do exemplo acima que a matriz transformação para a rotação em torno de um eixo coordenado diferente, digamos em torno do eixo y de um ângulo θ, será dado pela matriz

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Consequentemente a matriz para a combinação de duas rotações, a primeira sendo em torno do eixo z (ângulo ϕ) e a segunda sendo em torno do novo eixo y' (ângulo θ) é dada pelo produto matricial

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\operatorname{sen}\phi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\theta\cos\phi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi & \cos\theta \end{vmatrix}$$

A multiplicação matricial é, em geral, não comutativa. Então podemos esperar que se a ordem das rotações forem trocadas, e dessa maneira a ordem da multiplicação matricial na esquerda, o resultado final será diferente. Isto é verdade e o leitor poderá verificar. Isto está de acordo com uma observação feita anteriormente, ou seja, de que rotações finitas não obedecem a lei de adição vetorial e dessa maneira não são vetores apesar de uma rotação única ter uma direção e sentido (o eixo) e um módulo (o ângulo da rotação). Todavia, mostraremos mais tarde que rotações infinitesimais obedecem a lei da adição vetorial, e podem ser representadas por vetores.

1.16 Derivada de um Vetor

Consideremos um vetor $\vec{\mathrm{A}}$ cujas componentes são funções de uma única variável u. O vetor pode representar posição, velocidade, e assim por diante. O parâmetro u é normalmente o tempo t, mas pode ser qualquer quantidade que determina as componentes de $\vec{\mathrm{A}}$:

$$\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{i}}A_x(u) + \vec{\mathrm{j}}A_y(u) + \vec{\mathrm{k}}A_z(u)$$

A derivada de $\vec{\mathrm{A}}$ com respeito a u é definida, de uma maneira bastante análoga à derivada ordinária de uma função escalar, pelo limite

$$\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\vec{\mathrm{A}}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\vec{\mathrm{i}}\, \frac{\Delta A_x}{\Delta u} + \vec{\mathrm{j}}\, \frac{\Delta A_y}{\Delta u} + \vec{\mathrm{k}}\, \frac{\Delta A_z}{\Delta u} \right)$$

onde $\Delta A_x = A_x(u + \Delta u) - A_x(u)$, e assim por diante. Logo

$$\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du} = \vec{\mathrm{i}}\, \frac{dA_x}{du} + \vec{\mathrm{j}}\, \frac{dA_y}{du} + \vec{\mathrm{k}}\, \frac{dA_z}{du} \tag{1.27}$$

A derivada de um vetor, desse modo, é um vetor cujas componentes são derivadas ordinárias.

Segue-se das equações acima que a derivada de uma soma de dois vetores é igual à soma das derivadas, ou seja

$$\frac{d}{du}(\vec{\mathrm{A}} + \vec{\mathrm{B}}) = \frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du} + \frac{d\vec{\mathrm{B}}}{du} \tag{1.28}$$

Regras para diferenciar produtos vetoriais serão tratadas mais tarde na Seção 1.22.

1.17 Vetor Posição de uma Partícula

Em um dado sistema de referência a posição de uma partícula pode ser especificada por um único vetor, ou seja, o deslocamento da partícula em relação à origem do sistema de coordenadas. Este vetor é chamado de *vetor posição* da partícula. Em coordenadas retangulares, Figura 1.11, o vetor posição é simplesmente

$$\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{i}}x + \vec{\mathrm{j}}y + \vec{\mathrm{k}}\,z$$

As componentes do vetor posição de uma partícula em movimento são funções do tempo, ou seja

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

1.18 O Vetor Velocidade

Na Equação (1.27) demos a definição formal da derivada de qualquer vetor em relação a algum parâmetro. Em particular, se o vetor for o vetor posição $\vec{\mathrm{r}}$ de uma partícula em

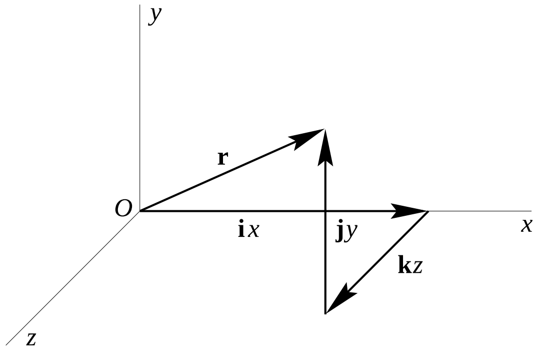


Figura 1.11: O vetor posição.

movimento e o parâmetro for o tempo t, a derivada de $\vec{r}$ relativamente a t será chamada de *velocidade*, que representaremos por $\vec{v}$. Logo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,\dot{x} + \vec{j}\,\dot{y} + \vec{k}\,\dot{z} \tag{1.29}$$

onde os pontos indicam diferenciação em relação a t. (Esta convenção é padrão e será usada doravante neste livro). Vamos examinar o significado geométrico do vetor velocidade. Suponha que uma partícula esteja em uma certa posição no instante t. Em um instante Δt mais tarde ela terá se movido da posição $\vec{r}(t)$ para a posição $\vec{r}(t+\Delta t)$. O vetor deslocamento durante o intervalo de tempo Δt é

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

de modo que o quociente $\Delta\vec{r}/\Delta t$ é um *vetor* que é paralelo ao deslocamento. A proporção que consideramos intervalos de tempo cada vez menores, o quociente $\Delta\vec{r}/\Delta t$ se aproxima de um limite $d\vec{r}/dt$ que chamamos velocidade. O vetor $d\vec{r}/dt$ expressa a direção, o sentido e o módulo da velocidade. A Figura 1.12 mostra isto graficamente. No intervalo de tempo Δt a partícula move-se ao longo da trajetória de P para P'. Quando Δt se aproxima de zero, o ponto P' se aproxima de P, e a direção do vetor $\Delta\vec{r}/\Delta t$ se aproxima da direção da tangente à trajetória em P. O vetor velocidade, desse modo, é sempre tangente à trajetória do movimento.

Chamamos o módulo do vetor velocidade simplesmente de velocidade. Em componentes retangulares a velocidade é

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{1.30}$$

Se chamarmos a distância escalar ao longo da trajetória de s, então podemos alternativamente expressar a velocidade como

$$v = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}}{\Delta t}$$

que se reduz à expressão da direita da Equação (1.30).

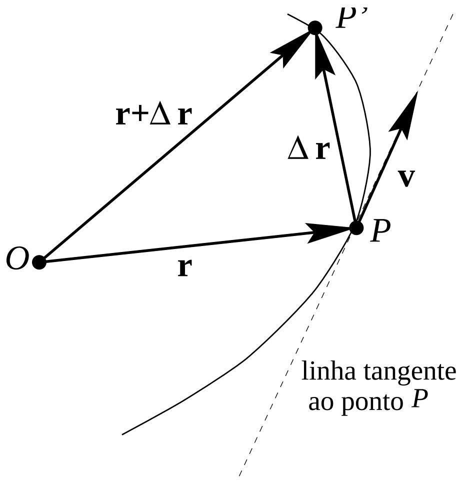


Figura 1.12: Vetor deslocamento de uma partícula em movimento.

1.19 Vetor Aceleração

A derivada da velocidade em relação ao tempo é chamada de *aceleração*. Representando a aceleração por $\vec{a}$, temos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \tag{1.31}$$

Em componentes retangulares

$$\vec{a} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z} \tag{1.32}$$

Então aceleração é uma quantidade vetorial cujas componentes, em coordenadas retangulares, são as derivadas segundas das coordenadas de posição de uma partícula em movimento. A representação de $\vec{a}$ em componentes tangencial e normal será discutido na Seção 1.23.

Exemplos

1. Vamos examinar o movimento representado pela equação

$$\vec{r}(t) = \vec{i}bt + \vec{j}(ct - \frac{gt^2}{2}) + \vec{k}\,0$$

que representa um movimento no plano xy, desde que a componente z é constante e igual a zero. A velocidade $\vec{v}$ é obtida diferenciando-se em relação ao tempo, ou seja,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}b + \vec{j}(c - gt)$$

A aceleração, do mesmo modo, é dada por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{j}g$$

Então $\vec{a}$ é no sentido negativo da direção y e tem magnitude constante g. A trajetória do movimento é uma parábola, como mostrado na Figura 1.13. (Esta equação realmente representa o movimento de um projétil). A velocidade v varia com t de acordo com a equação

$$v = \sqrt{b^2 + (c - gt)^2}$$

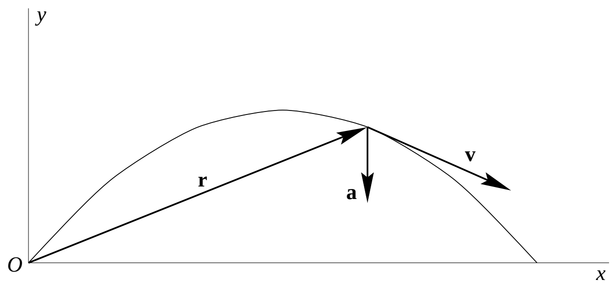


Figura 1.13: Vetores posição, velocidade e aceleração de uma partícula movendo-se em uma trajetória parabólica.

2. Suponha que o vetor posição de uma partícula seja dado por

$$\vec{r} = \vec{i}\, b \operatorname{sen} \omega t + \vec{j}\, b \cos \omega t + \vec{k}\, c$$

Vamos analisar o movimento. A distância à origem permanece constante

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{b^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t + c^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Diferenciando $\vec{r}$, encontramos

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\, b\omega \cos \omega t - \vec{j}\, b\omega \operatorname{sen} \omega t + \vec{k}\, 0$$

Desde que a componente z de $\vec{v}$ é zero, o vetor velocidade é paralelo ao plano xy. A partícula se movimenta em sua trajetória com velocidade constante

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{b^2\omega^2 \cos^2 \omega t + b^2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t} = b\omega$$

A aceleração

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{i}\, b\omega^2 \operatorname{sen} \omega t - \vec{j}\, b\omega^2 \cos \omega t$$

é perpendicular à velocidade, pois o produto escalar de $\vec{v}$ e $\vec{a}$ se anula

$$\vec{v} \,.\, \vec{a} = (b\omega \cos \omega t)(-b\omega^2 \operatorname{sen} \omega t) + (-b\omega \operatorname{sen} \omega t)(-b\omega^2 \cos \omega t) = 0$$

Além disso, a aceleração é perpendicular ao eixo z, como mostrado na Figura 1.14, porque $\vec{a} \,.\, \vec{k} = 0$. A trajetória real é um círculo de raio b contido no plano $z = c$. O movimento está ilustrado na Figura 1.14.

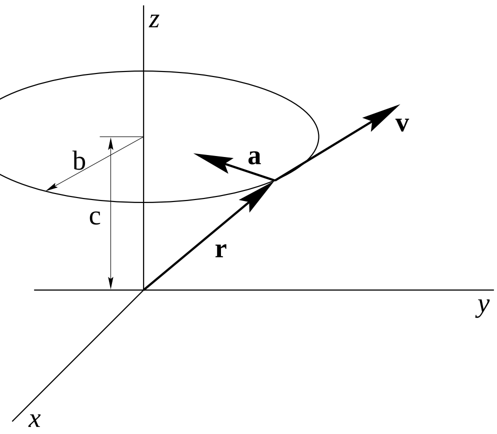


Figura 1.14: Vetores posição, velocidade e aceleração de uma partícula movendo-se em um círculo.

1.20 Integração Vetorial

Consideremos o caso em que a derivada em relação ao tempo de um vetor $\vec{\mathrm{r}}$ seja dada em coordenadas retangulares onde cada componente é uma função conhecida do tempo, ou seja,

$$\frac{d\vec{\mathrm{r}}}{dt} = \vec{\mathrm{i}}\, f_1(t) + \vec{\mathrm{j}}\, f_2(t) + \vec{\mathrm{k}}\, f_3(t)$$

É possível integrarmos em relação ao tempo para obter

$$\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{i}} \int f_1(t)dt + \vec{\mathrm{j}} \int f_2(t)dt + \vec{\mathrm{k}} \int f_3(t)dt \tag{1.33}$$

Trata-se evidentemente do inverso do processo de encontrar o vetor velocidade, quando o vetor posição é dado como função do tempo. O mesmo se aplica ao caso em que a aceleração é dada como uma função do tempo e uma integração nos leva à velocidade.

Exemplo

O vetor velocidade de uma partícula em movimento é dado por

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{i}}A + \vec{\mathrm{j}}Bt + \vec{\mathrm{k}}\,\frac{C}{t}$$

onde A, B e C são constantes. Encontre $\vec{\mathrm{r}}$.

Por integração, obtemos

$$\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{i}} \int A dt + \vec{\mathrm{j}} \int B t dt + \vec{\mathrm{k}} \int \frac{C dt}{t} = \vec{\mathrm{i}}At + \vec{\mathrm{j}}B\frac{t^2}{2} + \vec{\mathrm{k}}\,C \ln t + \vec{\mathrm{r}}_0$$

O vetor $\vec{\mathrm{r}}_0$ é a constante de integração.

1.21 Velocidade Relativa

Consideremos duas partículas cujos vetores posição são $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$, respectivamente, como mostrado na Figura 1.15. O deslocamento da segunda partícula com relação à primeira é a diferença $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ que chamaremos $\vec{r}_{12}$. A velocidade da segunda partícula relativamente à primeira é portanto

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

que chamamos de velocidade relativa. Transpondo $\vec{v}_1$, temos

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_{12}$$

para a velocidade da partícula 2 em relação a O em termos da velocidade da partícula 1 e da velocidade relativa.

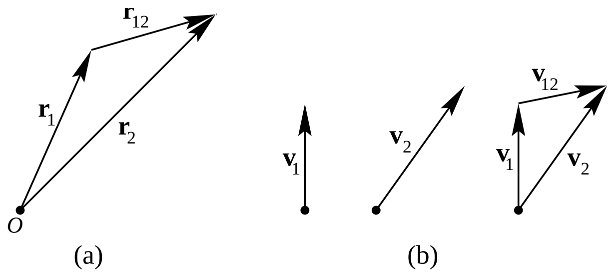


Figura 1.15: Vetor posição relativa (a) e vetor velocidade relativa (b) de duas partículas.

Devemos notar que o módulo da velocidade relativa de duas partículas não é o mesmo que a variação temporal da distância entre elas. Esta última quantidade é

$$\frac{d}{dt}|\vec{r}_{12}| = \frac{d}{dt}|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

que é diferente, em geral, de $|\vec{v}_{12}|$.

Exemplos

1. Uma partícula move-se ao longo do eixo x com velocidade v, sendo seu vetor posição dado por $\vec{r}_1 = \vec{\imath}(a + vt)$ onde a é uma constante. Uma segunda partícula move-se ao longo do eixo y com mesma velocidade, e seu vetor posição é $\vec{r}_2 = \vec{\jmath}(b + vt)$. Então a velocidade da segunda partícula em relação à primeira é

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{\jmath}v - \vec{\imath}v = v(\vec{\jmath} - \vec{\imath})$$

O módulo da velocidade relativa é então

$$v_{12} = v\sqrt{2}.$$

Qual é o valor de $d|\vec{r}_{12}|/dt$?

2. Um aro de raio b rola no chão com uma velocidade $\vec{v}_0$ para a frente. Encontre a velocidade em relação ao chão de um ponto P qualquer da periferia do aro. Primeiro considere a expressão

$$\vec{r}_{0P} = \vec{\imath}\, b \cos\theta - \vec{\jmath}\, b \,\mathrm{sen}\,\theta$$

onde

$$\theta = \omega t$$

Isto representa um movimento circular no sentido horário em torno da origem, o centro da roda, neste caso. A derivada em relação ao tempo então nos dá a velocidade de P relativamente ao centro do aro

$$\vec{v}_{rel} = -\vec{\imath}\, b\omega \,\mathrm{sen}\,\theta - \vec{\jmath}\, b\omega \cos\theta$$

Mas a velocidade angular é $\omega = v_0/b$, e desde que a velocidade do centro do aro em relação ao solo é $\vec{\imath} v_0$, então a velocidade de P em relação ao solo é

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\imath} v_0 - \vec{\imath}\, b\omega \,\mathrm{sen}\,\theta - \vec{\jmath}\, b\omega \cos\theta \\ &= \vec{\imath} v_0 (1 - \mathrm{sen}\,\theta) - \vec{\jmath}\, v_0 \cos\theta \end{aligned}$$

A Figura 1.16 mostra os vetores velocidades para vários valores de θ.

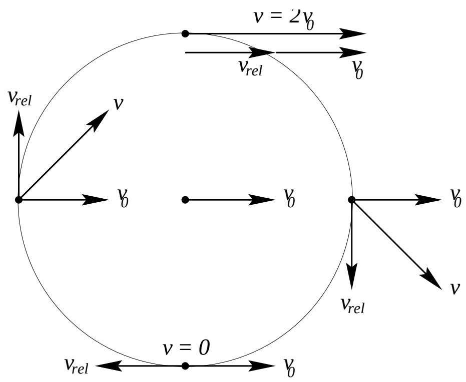


Figura 1.16: Vetores velocidade para vários pontos de um aro que rola.

1.22 Derivadas de Produtos de Vetores

Frequentemente é necessário tratar com derivadas dos produtos $n\vec{A}$, $\vec{A} \,.\, \vec{B}$ e $\vec{A} \times \vec{B}$ onde o escalar n e os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ são funções de um único parâmetro u, como na Seção 1.16. Da definição geral de derivada, temos

$$\frac{d(n\vec{A})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{n(u + \Delta u)\vec{A}(u + \Delta u) - n(u)\vec{A}(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\vec{A} \,.\, \vec{B})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{A}(u + \Delta u) \,.\, \vec{B}(u + \Delta u) - \vec{A}(u) \,.\, \vec{B}(u)}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{A}(u+\Delta u) \times \vec{B}(u+\Delta u) - \vec{A}(u) \times \vec{B}(u)}{\Delta u}$$

Adicionando-se e subtraindo-se expressões como $n(u + \Delta u)\vec{A}(u)$ aos numeradores, obtemos as seguintes regras:

$$\frac{d(n\vec{A})}{du} = \frac{dn}{du}\vec{A} + n\frac{d\vec{A}}{du} \quad (1.34)$$

$$\frac{d(\vec{A} \,.\, \vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} \,.\, \vec{B} + \vec{A} \,.\, \frac{d\vec{B}}{du} \quad (1.35)$$

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{du} \quad (1.36)$$

Observemos que é necessário preservar a ordem dos termos na derivada do produto vetorial. As etapas são deixadas como exercício para o leitor.

1.23 Componentes Normal e Tangencial da Aceleração

Mostrou-se na Seção 1.13 que qualquer vetor pode ser expresso como o produto de seu módulo por um vetor unitário de direção idêntica a este. Dessa maneira, o vetor velocidade de uma partícula em movimento pode ser escrito como o produto do módulo dessa velocidade v por um vetor unitário que dá a direção do movimento da partícula. Logo

$$\vec{v} = v\vec{\tau} \quad (1.37)$$

O vetor $\vec{\tau}$ é chamado de vetor unitário tangente. A proporção que a partícula se move o módulo da velocidade pode mudar e a direção de $\vec{\tau}$ pode mudar. Vamos usar a regra para diferenciação de produto de um escalar por um vetor para obter a aceleração. O resultado é

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad (1.38)$$

O vetor unitário $\vec{\tau}$, sendo de módulo constante, tem uma derivada $d\vec{\tau}/dt$ que necessariamente deve expressar a mudança na direção de $\vec{\tau}$ com o tempo. Isto está ilustrado na Figura 1.17(a). A partícula está inicialmente em um ponto P qualquer de sua trajetória.

Em um intervalo de tempo Δt a partícula move-se para outro ponto P' distante Δs medido ao longo da trajetória. Vamos chamar os vetores unitários tangentes em P e P' de $\vec{\tau}$ e $\vec{\tau}'$, respectivamente, como mostrado. As direções destes dois vetores diferem de um certo ângulo $\Delta\phi$ como mostrado na Figura 1.17(b).

É fácil ver que para pequenos valores de $\Delta\phi$, a diferença $\Delta\vec{\tau}$ se aproxima de $\Delta\phi$ em grandeza. Também, a direção de $\Delta\vec{\tau}$ torna-se perpendicular à direção $\vec{\tau}$ no limite quando $\Delta\phi$ e Δs se aproximam de zero. Segue-se que a derivada $d\vec{\tau}/d\phi$ tem módulo unitário e é perpendicular a $\vec{\tau}$. Deveremos então chamá-lo de vetor unitário normal e representá-lo por $\vec{n}$

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\phi} = \vec{n} \quad (1.39)$$

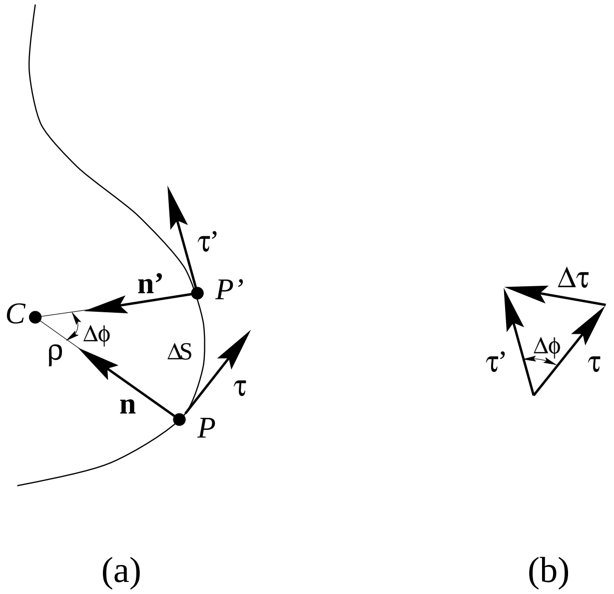


Figura 1.17: Vetores unitários tangente e normal.

A seguir, para encontrar a derivada de $\vec{\tau}$ em relação ao tempo $d\vec{\tau}/dt$, usamos a regra da cadeia como segue

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \vec{\mathrm{n}}\frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \vec{\mathrm{n}}\frac{v}{\rho}$$

onde

$$\rho = \frac{ds}{d\phi}$$

é o raio de curvatura da trajetória da partícula no ponto P. O valor acima para $d\vec{\tau}/dt$ é agora levado na Equação (1.38) para nos dar o resultado final

$$\vec{\mathrm{a}} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{\mathrm{n}} \tag{1.40}$$

Então a aceleração de uma partícula em movimento tem uma componente de módulo

$$a_\tau = \dot{v} = \ddot{s}$$

na direção do movimento. Esta é a aceleração tangencial. A outra componente de módulo

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

é a componente normal. Esta componente está sempre apontando diretamente para o centro de curvatura no lado côncavo da trajetória. Por isso a componente normal é também chamada de aceleração centrípeta.

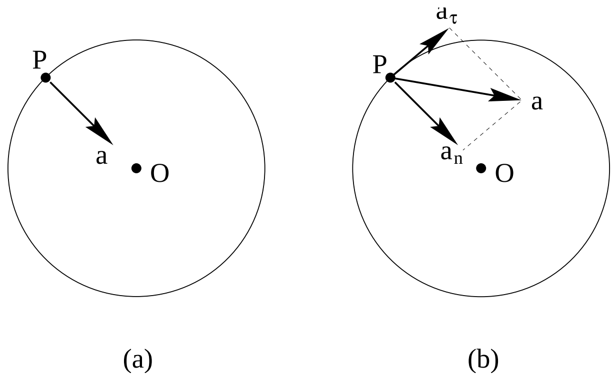


Figura 1.18: Vetores aceleração para uma partícula se movendo numa trajetória circular. (a) velocidade constante; (b) velocidade aumentando.

Das considerações acima vemos que a derivada relativa ao tempo do módulo da velocidade é apenas a componente tangencial da aceleração. O módulo da aceleração total é dado por

$$|\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} \tag{1.41}$$

Por exemplo, se uma partícula move-se num círculo com velocidade constante v, o vetor aceleração tem módulo $\frac{v^2}{R_0}$ onde R_0 é o raio do círculo. O vetor aceleração aponta sempre para o centro do círculo nesse caso. Todavia, se o módulo da velocidade não é constante mas aumenta numa taxa $\dot{v}$, então a aceleração tem uma componente para a frente desta quantidade e é desviada do centro do círculo para o lado do movimento, como ilustrado na Figura 1.18. Se a partícula está parando, então o vetor aceleração é desviado na direção oposta.

1.24 Velocidade e Aceleração em Coordenadas Polares Planas

Muitas vezes é conveniente usar coordenadas polares (r, θ) para expressar a posição de uma partícula que se move em um plano. Vetorialmente, a posição da partícula pode ser escrita como o produto da distância radial r por um vetor unitário radial $\vec{e}_r$:

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \tag{1.42}$$

Quando a partícula se move, ambos r e $\vec{e}_r$ variam, pois ambos são funções do tempo. Dessa maneira, se derivarmos em relação ao tempo, teremos

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \tag{1.43}$$

Para calcular a derivada $d\vec{e}_r/dt$ vamos considerar o diagrama vetorial na Figura 1.19. Um estudo da figura mostra que quando a direção de $\vec{r}$ varia de uma quantidade $\Delta\theta$, a mudança

correspondente $\Delta\vec{e}_r$ no vetor radial unitário será obtido da seguinte maneira: o módulo $|\Delta\vec{e}_r|$ é aproximadamente igual a $\Delta\theta$, e a direção de $\Delta\vec{e}_r$ é quase perpendicular a $\vec{e}_r$. Vamos introduzir outro vetor unitário $\vec{e}_\theta$ cuja direção é perpendicular a $\vec{e}_r$. Então temos

$$\Delta\vec{e}_r = \vec{e}_\theta \Delta\theta$$

Dividindo-se por Δt e tomando-se o limite, obtemos

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{e}_\theta \frac{d\theta}{dt} \tag{1.44}$$

para a derivada em relação ao tempo do vetor radial unitário. Da mesma forma, podemos argumentar que a mudança no vetor $\vec{e}_\theta$ é dado pela aproximação

$$\Delta\vec{e}_\theta = -\vec{e}_r \Delta\theta$$

Aqui o sinal negativo é colocado para indicar que a direção da variação $\Delta\vec{e}_\theta$ é oposto à direção de $\vec{e}_r$, como pode ser visto na figura. Consequentemente, a derivada temporal de $\vec{e}_\theta$ é dada por

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\vec{e}_r \frac{d\theta}{dt} \tag{1.45}$$

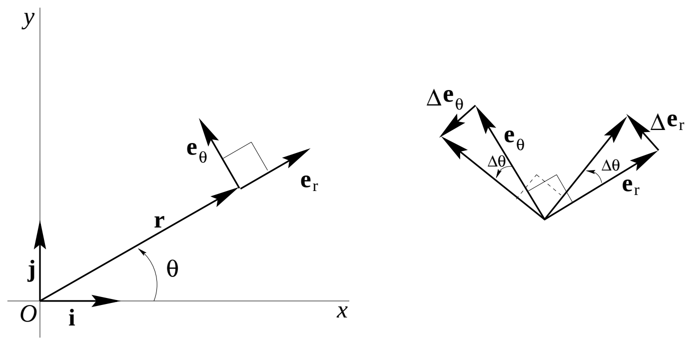


Figura 1.19: Vetores unitários para coordenadas polar plana.

Usando a Equação (1.44) para a derivada do vetor radial unitário, podemos finalmente escrever a equação para a velocidade como

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \tag{1.46}$$

Então $\dot{r}$ é o valor da componente radial do vetor velocidade, e $r\dot{\theta}$ é o valor da componente transversal.

Para determinar o vetor aceleração, tomamos a derivada em relação ao tempo do vetor velocidade. Teremos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

Os valores de $d\vec{e}_r/dt$ e $d\vec{e}_\theta/dt$ são dados pelas Equações (1.44) e (1.45) e nos leva à seguinte equação para o vetor aceleração em coordenadas polares planas:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta \tag{1.47}$$

Então o valor da componente radial do vetor aceleração é

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \tag{1.48}$$

e a componente transversal é

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \tag{1.49}$$

O resultado acima mostra, por exemplo, que se uma partícula se move num círculo de raio constante b, então $\dot{r} = 0$, e dessa maneira a componente radial da aceleração tem valor $b\dot{\theta}^2$ e aponta diretamente para o centro da trajetória circular. O valor da componente transversal neste caso é $b\ddot{\theta}$. Por outro lado, se a partícula se move ao longo de uma linha radial fixa, isto é, se θ é constante, então a componente radial se reduz a $\ddot{r}$ e a componente transversal se anula. Se r e θ ambos variam, então a expressão geral (1.47) dá a aceleração.

Exemplo

Uma partícula move-se em uma trajetória espiral dada pelas coordenadas polares

$$r = bt^2 \qquad \theta = ct$$

onde b e c são constantes. Encontre a velocidade e aceleração como função de t. Da Equação (1.46), encontramos

$$\vec{v} = \vec{e}_r\frac{d}{dt}(bt^2) + \vec{e}_\theta(bt^2)\frac{d}{dt}(ct) = (2bt)\vec{e}_r + (bct^2)\vec{e}_\theta$$

Da mesma forma, da Equação (1.47), temos

$$\vec{a} = \vec{e}_r(2b - bt^2c^2) + \vec{e}_\theta[0 + 2(2bt)c] = b(2 - t^2c^2)\vec{e}_r + 4bct\vec{e}_\theta$$

é interessante notar que, neste exemplo, a componente radial da aceleração torna-se negativa para t grande, apesar do raio estar sempre crescendo monotonicamente com o tempo.

1.25 Velocidade e Aceleração em Coordenadas Cilíndricas e Esféricas

1.25.1 Coordenadas Cilíndricas

No caso de movimento tridimensional, a posição de uma partícula pode ser descrita em termos das coordenadas cilíndricas R, ϕ, z. O vetor posição pode então ser escrito na forma

$$\vec{r} = R\vec{e}_R + z\vec{e}_z \tag{1.50}$$

onde $\vec{e}_R$ é um vetor radial unitário no plano xy e $\vec{e}_z$ é um vetor unitário na direção z. Um terceiro vetor unitário $\vec{e}_\phi$ é necessário para que os três vetores $\vec{e}_R\vec{e}_\phi\vec{e}_z$ constituam uma tríade orientada de acordo com a mão direita como ilustrado na Figura 1.20. Notamos que $\vec{k} = \vec{e}_z$.

Os vetores velocidade e aceleração são obtidos por diferenciação, como antes. Isto novamente envolverá derivadas de vetor unitários. Um argumento semelhante àquele usado no caso bidimensional mostra que $d\vec{e}_R/dt = \vec{e}_\phi\dot{\phi}$ e $d\vec{e}_\phi/dt = -\vec{e}_R\dot{\phi}$. O vetor unitário $\vec{e}_z$ não varia sua direção, logo sua derivada relativa ao tempo é zero.

Tendo em vista estes fatos, vemos facilmente que os vetores velocidade e aceleração são dados pelas relações abaixo

$$\vec{v} = \dot{R}\vec{e}_R + R\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z \tag{1.51}$$

$$\vec{a} = (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\vec{e}_R + (2\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z \tag{1.52}$$

Estas equações dão os valores de $\vec{v}$ e $\vec{a}$ em termos de suas componentes na tríade girada $\vec{e}_R\vec{e}_\phi\vec{e}_z$.

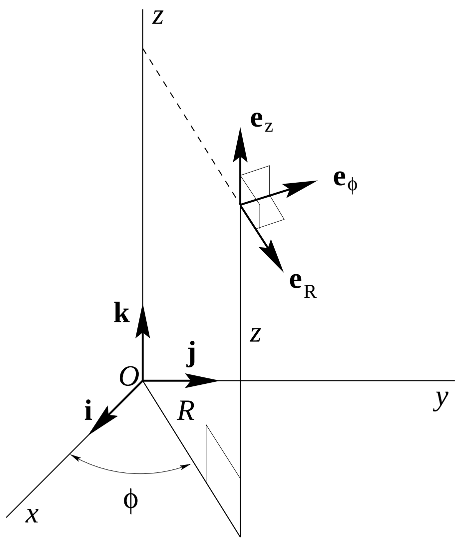


Figura 1.20: Vetores unitários para coordenadas cilíndricas.

Alternativamente, podemos obter as derivadas dos vetores unitários usando as seguintes equações que relacionam as tríades fixa e girada.

$$\begin{aligned}\vec{e}_R &= \vec{\imath}\cos\phi + \vec{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\phi \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{\imath}\,\mathrm{sen}\,\phi + \vec{\jmath}\cos\phi \\ \vec{e}_z &= \vec{k}\end{aligned} \tag{1.53}$$

Deixamos as etapas como um exercício. O mesmo resultado pode ser também obtido utilizando a matriz rotação como foi feito no Exemplo 2, Seção 1.15.

1.25.2 Coordenadas Esféricas

Quando utilizarmos as coordenadas esféricas r, θ, ϕ para especificar a posição de uma partícula, escrevemos o vetor posição como o produto da distância radial r pelo vetor radial unitário $\vec{e}_r$ da mesma maneira que foi feito quando do uso de coordenadas polares planas. Então

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

A direção $\vec{e}_r$ fica agora especificada por dois ângulos θ e ϕ. Introduzimos mais dois vetores unitários $\vec{e}_\phi$ e $\vec{e}_\theta$ como mostrado na Figura 1.21.

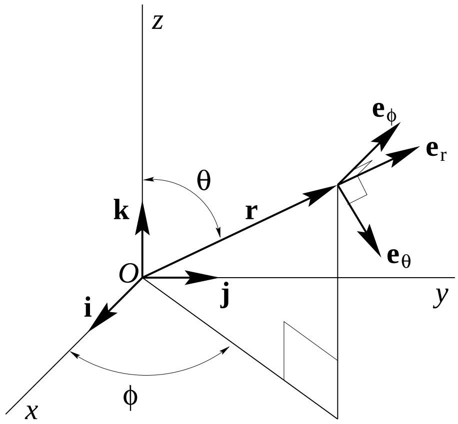


Figura 1.21: Vetores unitários para coordenadas esféricas.

A velocidade é

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \tag{1.54}$$

O nosso problema seguinte é expressar a derivada $d\vec{e}_r/dt$ em termos dos vetores unitários da tríade girada.

Usando a figura, vemos que as seguintes relações entre as duas tríades são válidas.

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \vec{\imath}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + \vec{\jmath}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + \vec{k}\,\cos\theta \\ \vec{e}_\theta &= \vec{\imath}\cos\theta\cos\phi + \vec{\jmath}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi - \vec{k}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \vec{e}_\phi &= -\vec{\imath}\,\mathrm{sen}\,\phi + \vec{\jmath}\cos\phi \end{aligned} \tag{1.55}$$

Estas equações expressam os vetores unitários da tríade girada em termos da tríade fixa. Notemos a semelhança entre esta transformação e aquela da segunda parte do Exemplo 2 na Seção 1.15. Identificando as rotações corretamente vemos que as duas transformações são, de fato, idênticas. Vamos diferenciar a primeira equação em relação ao tempo. O resultado é

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{\imath}(\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi) + \vec{\jmath}(\dot{\theta}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi + \dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi) - \vec{k}\,\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

A seguir, usando as expressões para $\vec{e}_\phi$ e $\vec{e}_\theta$ na Equação (1.55), encontramos que a equação acima se reduz a

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\phi}\vec{e}_\phi\,\mathrm{sen}\,\theta + \dot{\theta}\vec{e}_\theta \tag{1.56}$$

As outras duas derivadas são obtidas por procedimento semelhante. Os resultados são

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\phi}\cos\theta\vec{e}_\phi \tag{1.57}$$

$$\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\vec{e}_r - \dot{\phi}\cos\theta\vec{e}_\theta \tag{1.58}$$

As etapas são deixadas como um exercício. Voltando agora ao problema de encontrar $\vec{v}$, inserimos a expressão para $d\vec{e}_r/dt$ dada pela Equação (1.56) na Equação (1.54). O resultado final é

$$\vec{v} = \vec{e}_r\dot{r} + \vec{e}_\phi r\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + \vec{e}_\theta r\dot{\theta} \tag{1.59}$$

dando o vetor velocidade em termos de suas componentes na tríade girada.

Para encontrar a aceleração, diferenciamos a expressão acima em relação ao tempo. Obtemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{e}_r\ddot{r} + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \vec{e}_\phi\frac{d(r\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta)}{dt} + r\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta\frac{d\vec{e}_\phi}{dt} + \vec{e}_\theta\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

Usando as fórmulas deduzidas anteriormente para as derivadas dos vetores unitários, encontramos prontamente que a expressão acima para a aceleração se reduz a

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\mathrm{sen}^2\theta - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\vec{e}_\theta + \\ &\quad +(r\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\vec{e}_\phi\end{aligned} \tag{1.60}$$

dando o vetor aceleração em termos de suas componentes na tríade $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$.

1.26 Velocidade Angular

Uma partícula cujo vetor posição inicial é $\vec{r}$ sofre um deslocamento caracterizado por uma rotação de um ângulo $\delta\phi$ em torno de um eixo de direção definida por um vetor unitário $\vec{e}$, Figura 1.22. A partícula se moverá então ao longo de um arco de círculo de raio $r\,\mathrm{sen}\,\theta$ onde θ é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{e}$. O módulo do deslocamento da partícula é então $|\delta\vec{r}| = r\,\mathrm{sen}\,\theta\delta\phi$, e a direção do deslocamento é perpendicular a ambos $\vec{r}$ e $\vec{e}$. Podemos, pois expressar o deslocamento vetorialmente como um produto vetorial, ou seja

$$\delta\vec{r} = \delta\phi\vec{e}\times\vec{r}$$

Dessa maneira, a velocidade da partícula é dada por

$$\dot{\vec{r}} = \lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \dot{\phi}\vec{e}\times\vec{r} \tag{1.61}$$

Podemos agora introduzir o vetor $\vec{\omega}$ definido como o produto

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{e}$$

chamado de velocidade angular. A velocidade da partícula é então expressa por

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\times\vec{r} \tag{1.62}$$

Vamos agora mostrar que velocidades angulares obedecem a regra de adição vetorial. Consideremos o deslocamento causado por uma rotação infinitesimal $\delta\phi_1$ em torno de um eixo $\vec{\mathrm{e}}_1$ seguido de uma segunda rotação $\delta\phi_2$ em torno de um eixo diferente $\vec{\mathrm{e}}_2$. A primeira rotação muda o vetor posição $\vec{\mathrm{r}}$ para um novo vetor posição $\vec{\mathrm{r}} + \delta\phi_1\vec{\mathrm{e}}_1 \times \vec{\mathrm{r}}$. Dessa maneira o deslocamento líquido devido às duas rotações é

$$\delta\vec{\mathrm{r}}_{12} = \delta\phi_1\vec{\mathrm{e}}_1 \times \vec{\mathrm{r}} + \delta\phi_2\vec{\mathrm{e}}_2 \times (\vec{\mathrm{r}} + \delta\phi_1\vec{\mathrm{e}}_1 \times \vec{\mathrm{r}})$$

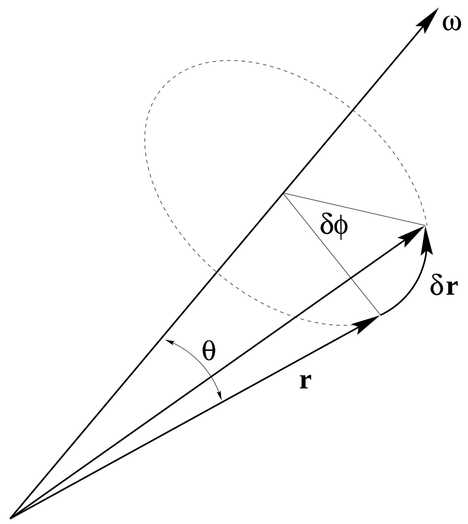


Figura 1.22: Deslocamento produzido por uma rotação. O raio da trajetória circular é $r \operatorname{sen}\theta$.

Se as duas rotações angulares são ambas suficientemente pequenas de tal maneira que possamos desprezar o produto $\delta\phi_1\delta\phi_2$, então encontramos depois da expansão que

$$\delta\vec{\mathrm{r}}_{12} = (\delta\phi_1\vec{\mathrm{e}}_1 + \delta\phi_2\vec{\mathrm{e}}_2) \times \vec{\mathrm{r}}$$

Se trocarmos a ordem das rotações, encontramos, de fato, o mesmo resultado, isto é, $\delta\vec{\mathrm{r}}_{12} = \delta\vec{\mathrm{r}}_{21}$. Em outras palavras, as duas rotações infinitesimais são comutativas. Finalmente, vamos dividir por δt e tomar o limite, como na Equação (1.61) acima. Podemos então escrever

$$\dot{\vec{\mathrm{r}}} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{\mathrm{r}}$$

para a velocidade da partícula onde $\vec{\omega}_1 = \dot{\phi}_1\vec{\mathrm{e}}_1$ e $\vec{\omega}_2 = \dot{\phi}_2\vec{\mathrm{e}}_2$. Então podemos descrever o movimento da partícula considerando uma única velocidade angular

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$$

Dada pela regra normal de soma vetorial.

Exercícios de Treinamento

1.1 Dados os dois vetores $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{B} = \vec{j} - \vec{k}$. Encontre

a) $\vec{A} + \vec{B}$ e $|\vec{A} + \vec{B}|$

b) $\vec{A} - \vec{B}$ e $|\vec{A} - \vec{B}|$

c) $\vec{A} \cdot \vec{B}$

d) $\vec{A} \times \vec{B}$ e $|\vec{A} \times \vec{B}|$

e) $(\vec{A} + 2\vec{B}) \cdot (2\vec{A} - \vec{B})$

f) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

1.2 Dados $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{C} = 2\vec{j} - \vec{k}$. Encontre

a) $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$

b) $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C})$ e $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C}$

c) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ e $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$

d) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ e $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$

1.3 Encontre o ângulo entre os vetores $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{B} = \vec{i} + \vec{j}$ (Dica: Estes dois vetores definem uma diagonal do cubo e uma diagonal da face do cubo).

1.4 Dados os vetores que variam com o tempo $\vec{A} = \vec{i}\cos\omega t + \vec{j}\,\mathrm{sen}\,\omega t$ e $\vec{B} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$. Encontre

a) $d\vec{A}/dt$ e $|d\vec{A}/dt|$

b) $d^2\vec{B}/dt^2$ e $|d^2\vec{B}/dt^2|$

c) $d(\vec{A} \cdot \vec{B})/dt$ e $d(\vec{A} \times \vec{B})/dt$

Problemas

1.5 Para quais valores de q os dois vetores $\vec{A} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}q$ e $\vec{B} = \vec{i}q - 2\vec{j} + 2\vec{k}q$ são perpendiculares entre si.

1.6 Prove a identidade vetorial $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$.

1.7 Dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ representam lados concorrentes de um paralelogramo. Prove que a área do paralelogramo é $|\vec{A} \times \vec{B}|$.

1.8 Prove a lei trigonométrica dos senos usando métodos vetoriais.

1.9 Três vetores $\vec{A}$, $\vec{B}$ e $\vec{C}$ representam lados concorrentes de um paralelepípedo. Mostre que o volume do paralelepípedo é $|\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})|$.

1.10 Expresse o vetor $\vec{i} + \vec{j}$ em termos da tríade $\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$ onde os eixos $x'z'$ são girados em torno do eixo y (que coincide com o eixo y') de um ângulo de 60°.

1.11 Mostre que o módulo de um vetor não é alterado por uma rotação. Use a matriz

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

para uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo z.

1.12 Encontre a matriz transformação para uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo z seguida por uma rotação de um ângulo ϕ em torno do eixo y'.

1.13 Os dois grupos de vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{c}'$ são chamados de recíprocos se $\vec{a} \,.\, \vec{a}' = \vec{b} \,.\, \vec{b}' = \vec{c} \,.\, \vec{c}' = 1$ e qualquer outro produto escalar misturado como $\vec{a} \,.\, \vec{b}' = 0$. Mostre que:
$\vec{c}' = (\vec{a} \times \vec{b})/Q$, $\vec{a}' = (\vec{b} \times \vec{c})/Q$, $\vec{b}' = (\vec{c} \times \vec{a})/Q$ onde $Q = \vec{a} \,.\, (\vec{b} \times \vec{c})$.

1.14 Encontre um conjunto de vetores que sejam recíprocos ao conjunto $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ e $\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

1.15 Uma partícula move-se numa trajetória elíptica dada pela equação $\vec{r} = \vec{\imath} b \cos\omega t + \vec{\jmath} 2b \operatorname{sen}\omega t$. Encontre a velocidade escalar em função do tempo.

1.16 No problema anterior encontre o ângulo entre o vetor velocidade e o vetor aceleração no instante $t = \pi/4\omega$.

1.17 A posição de uma partícula é dada em coordenadas polares planas por $r = be^{kt}$, $\theta = ct$. Mostre que o ângulo entre o vetor velocidade e o vetor aceleração permanece constante a proporção que a partícula se move para fora numa trajetória em espiral.

1.18 Uma partícula se move num círculo de raio b. Se a velocidade escalar da partícula varia com o tempo de acordo com a equação $v = At^2$ para que valor, ou valores de t o vetor aceleração forma um ângulo de 45° com o vetor velocidade?

1.19 Uma partícula se move numa trajetória helicoidal tal que sua posição, em coordenadas cilíndricas, é dada por

$$R = b \qquad \phi = \omega t \qquad z = ct^2$$

Encontre a velocidade escalar e o módulo da aceleração como funções do tempo.

1.20 Mostre que o módulo da componente tangencial da aceleração é dada pela expressão

$$a_t = \frac{\vec{a} \,.\, \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

e que o módulo da componente normal é

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

1.21 Use o resultado acima para encontrar as componentes normal e tangencial da aceleração como função do tempo no Problema 1.19.

1.22 Prove que $\vec{v} \,.\, \vec{a} = v\dot{v}$ e como consequência que para uma partícula que se move $\vec{v}$ e $\vec{a}$ são perpendiculares entre sí se a velocidade escalar v for constante. (Sugestão: Diferencie ambos os lados da equação $\vec{v} \,.\, \vec{v} = v^2$ com relação a t. Lembre-se que $\dot{v}$ não é o mesmo que $|\vec{a}|$.)

1.23 Prove que

$$\frac{d}{dt}[\vec{r} \,.\, (\vec{v} \times \vec{a})] = \vec{r} \,.\, (\vec{v} \times \dot{\vec{a}})$$

1.24 Prove que $|\vec{v} \times \vec{a}| = v^3/\rho$, onde ρ é o raio de curvatura da trajetória de uma partícula em movimento.

1.25 Usando o fato de que o vetor tangente unitário $\vec{\tau}$ pode ser expresso como

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$$

encontre uma expressão para o vetor normal unitário em termos de $\vec{a}$, a, $\vec{v}$, v, e $\dot{v}$.

1.26 Um aro de raio b é colocado numa montagem sobre mancais e gira como se segue: O aro gira com velocidade angular constante ω_1 em torno de seu próprio eixo, o qual, por sua vez roda com velocidade angular constante ω_2 em torno de um eixo vertical de tal maneira que o eixo do aro permanece num plano horizontal e o centro do aro fica imóvel. Use coordenadas esféricas para encontrar a aceleração de qualquer ponto na periferia do aro. Em particular, encontre a aceleração do ponto mais alto do aro. (Sugestão: Use o fato de que coordenadas esféricas podem ser escolhidas tais que $r = b$, $\theta = \omega_1 t$ e $\phi = \omega_2 t$).

Respostas de problemas selecionados de números ímpares

1.1 (a) $\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\sqrt{6}$
(b) $\vec{i} + \vec{k}$, $\sqrt{2}$
(c) 1
(d) $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\sqrt{3}$

1.3 $\arccos\sqrt{2/3} = 35°15'$

1.5 $(-1 \pm \sqrt{17})/4$

1.15 $\omega b\sqrt{1 + 3\cos^2\omega t}$

1.19 $\sqrt{b^2\omega^2 + 4c^2t^2}$, $\sqrt{b^2\omega^4 + 4c^2}$

1.21 $\sqrt{\frac{b^2\omega^2(b^2\omega^4+4c^2+4c^2t^2\omega^2)}{b^2\omega^2+4c^2t^2}}$, $\frac{4c^2t}{\sqrt{b^2\omega^2+4c^2t^2}}$

1.25 $(\vec{a}v - \vec{v}\dot{v})/|\vec{a} \times \vec{v}|$

Capítulo 2

Mecânica Newtoniana — Movimento Retilíneo de uma Partícula

Como foi estabelecido na introdução, a dinâmica é a parte da mecânica que lida com as leis físicas que governam o movimento real dos corpos. Um dos objetivos fundamentais da dinâmica é predizer, dentre todos os movimentos possíveis de um sistema material qual movimento particular ocorreria numa dada situação. Nosso estudo da dinâmica, neste momento, será baseado nas leis do movimento como foram primeiramente formuladas por Newton. Num Capítulo posterior veremos maneiras alternativas de expressar as leis do movimento numa forma mais avançada utilizando as equações de Lagrange e Hamilton. Entretanto, estas equações não constituem teorias diferentes uma vez que podem ser derivadas das leis de Newton.

2.1 As Leis de Newton do Movimento

O leitor, sem dúvida, já está familiarizado com as leis de Newton do movimento. Elas são as seguintes:

I - Todo corpo permanece em seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme a não ser que seja obrigado, por uma força, a mudar tal estado.

II - Mudança de movimento é proporcional à força aplicada e ocorre na direção da força.

III - A cada ação corresponde sempre uma reação em sentido oposto, ou seja, as ações mútuas de dois corpos são sempre iguais, em módulo, e com sentidos opostos.

Examinemos agora estas leis detalhadamente.

2.2 Primeira Lei de Newton — Referenciais Inerciais

A primeira lei descreve uma propriedade comum a toda matéria: a inércia. Ela afirma que um corpo em movimento descreve uma trajetória retilínea com velocidade constante a menos que alguma influência chamada força o impeça de fazê-lo. O fato de um corpo se mover ou

não em linha reta com velocidade constante depende não somente de influências externas (forças) mas também do sistema de referência utilizado para descrever o movimento. A primeira lei realmente nos leva à definição de um tipo particular de sistema de referência chamado sistema de referência Newtoniano ou inercial. Tal sistema é aquele no qual a primeira lei de Newton é válida. Sistemas de referência acelerados ou em rotação não são inerciais.

A questão que ocorre naturalmente é como podemos determinar se um dado sistema de referência é ou não um sistema inercial. A resposta não é simples. A fim de eliminarmos todas as forças que poderiam atuar em um corpo é necessário isolá-lo completamente. Isto certamente é impossível uma vez que pelo menos forças gravitacionais estariam atuando sobre o corpo, a não ser que ele estivesse colocado a uma distância infinita de todos os outros corpos.

Na prática, em casos onde a precisão desejada não seja muito alta, um sistema fixo à Terra é aproximadamente inercial. Por exemplo, uma bola de bilhar parece mover-se em linha reta com velocidade constante, exceto durante as colisões com outras bolas ou com as tabelas. Entretanto, se este movimento fosse medido com bastante precisão observaríamos que a trajetória é ligeiramente curvilínea. Isto porque a Terra está girando e um sistema fixo a ela não é, na verdade, inercial. Um sistema que usasse o centro da Terra, o centro do Sol e uma estrela distante como pontos de referência seria melhor do que o anterior. Mas nem mesmo este sistema seria estritamente inercial por causa do movimento orbital da Terra em torno do Sol. Prosseguindo, obteríamos uma aproximação ainda melhor se usassemos o centro do Sol e duas estrelas distantes como pontos de referência. Aceita-se que o sistema de referência por excelência, sob o ponto de vista da mecânica de Newton, seria aquele que levasse em conta a média de toda a matéria do universo.

2.3 Massa e Força — Segunda e Terceira Leis de Newton

Todos nós estamos familiarizados com o fato de que, além de ser mais difícil levantarmos uma pedra grande do que, digamos, um pedaço de madeira, é necessário também um esforço maior para colocá-la em movimento (ou para pará-la). Dizemos que a pedra tem maior inércia do que a madeira. A medida quantitativa de inércia é chamada massa. Consideremos dois corpos A e B. Como medir a inércia de um corpo em relação ao outro? Podemos imaginar muitas experiências para responder a essa questão. Se dois corpos interagissem, por exemplo através de uma mola, observaríamos, por meio de medidas cuidadosas, que as acelerações dos dois corpos teriam sentidos opostos e que a razão entre seus módulos seria constante. (Na suposição de que as acelerações fossem medidas em relação a um sistema de referência inercial e que apenas a influência da interação dos dois corpos A e B estaria presente). Podemos expressar este fato importante e fundamental pela equação

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\frac{d\vec{v}_B}{dt}\mu_{BA} \tag{2.1}$$

A constante μ_{BA} é, de fato, a medida da inércia de B em relação a A. Da Equação (2.1) obtemos que $\mu_{BA} = 1/\mu_{AB}$. Podemos expressar μ_{BA} como a razão

$$\mu_{BA} = \frac{m_B}{m_A}$$

e usar a inércia de um corpo padrão como unidade. A razão m_B/m_A não deve depender do corpo escolhido como padrão. Isto seria verdade se, considerando um terceiro corpo C, pudéssemos escrever

$$\frac{\mu_{BC}}{\mu_{AC}} = \mu_{BA}$$

Observamos que a razão acima se verifica. Chamamos a quantidade m de massa.

Estritamente falando, m deve ser chamado de massa inercial, uma vez que sua definição é baseada nas propriedades de inércia. Na prática a razão entre as massas é usualmente determinada por pesagem. O peso ou força gravitacional é proporcional àquilo que chamamos de massa gravitacional de um corpo. Todas as experiências realizadas até hoje indicam que a massa inercial é proporcional à massa gravitacional. Por isso, considerando nossos objetivos, não precisaremos distinguir os dois tipos de massa.

O fato fundamental contido na Equação (2.1) pode agora ser escrito na forma

$$m_A \frac{d\vec{v}_A}{dt} = -m_B \frac{d\vec{v}_B}{dt} \tag{2.2}$$

O produto da massa pela aceleração na equação acima é a *mudança de movimento* referida na segunda lei de Newton e, de acordo com essa lei, é proporcional à força. Em outras palavras, podemos escrever a segunda lei como

$$\vec{F} = km\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.3}$$

onde $\vec{F}$ é a força e k é uma constante de proporcionalidade. É usual tomar $k = 1$ e escrever[1]

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.4}$$

A equação acima é equivalente a

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \tag{2.5}$$

se a massa fosse constante. De acordo com a teoria da relatividade, a massa de um corpo em movimento não é constante mas depende da velocidade do corpo. Então as Equações (2.4) e (2.5) não são equivalentes. Entretanto, para velocidades pequenas comparadas à velocidade da luz, 3×10^8 m/s, a variação de massa é desprezível.

O fato fundamental expresso pela Equação (2.2) pode ser interpretado, de acordo com a Equação (2.4), como sendo a afirmativa de que dois corpos que interagem diretamente exercem forças iguais e opostas um no outro

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

[1] No sistema MKS a unidade de força, definida pela Equação (2.4) é chamada newton. Então a força de 1 newton ocasiona uma aceleração de 1 m/s^2 em um objeto de 1 kg de massa. No sistema CGS a unidade de força (1g $\times$ 1cm/s^2) é chamada dina.

Isto está incorporado no enunciado da terceira lei de Newton. As forças são chamadas ação e reação.

Existem situações nas quais a terceira lei não é verificada. Quando dois corpos estiverem separados por uma grande distância e interagirem um com o outro através de um campo de força que se propaga com velocidade finita, tal como a interação entre cargas elétricas em movimento, as forças de ação e reação não serão sempre iguais e opostas. Entretanto, em tais casos, é possível considerar o campo de força como um terceiro *corpo* com sua própria ação e reação. Então a terceira lei não precisa ser descartada. Veja Seção 4.1 e as referências citadas lá.

Uma grande vantagem do conceito de força é que ele nos permite restringir nossa atenção a um único corpo. O significado físico da idéia de força é que, para uma dada situação, usualmente podemos encontrar uma função relativamente simples das coordenadas, chamada função força, que quando igualada ao produto da massa pela aceleração descreve corretamente o movimento do corpo. Esta é a essência da mecânica Newtoniana.

2.4 Momentum Linear

O produto da massa pela velocidade é chamado *momentum linear* e é representado pelo símbolo $\vec{\mathrm{p}}$. Então

$$\vec{\mathrm{p}} = m\vec{\mathrm{v}} \tag{2.6}$$

O enunciado matemático da segunda lei de Newton, Equação (2.5), pode ser escrito

$$\vec{\mathrm{F}} = \frac{d\vec{\mathrm{p}}}{dt} \tag{2.7}$$

Ou seja, a força é igual à razão temporal da variação do momentum linear.

A terceira lei, ação e reação, pode ser convenientemente expressa em termos do momentum linear. Se dois corpos A e B interagem, teremos

$$\frac{d\vec{\mathrm{p}}_A}{dt} = -\frac{d\vec{\mathrm{p}}_B}{dt} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d}{dt}(\vec{\mathrm{p}}_A + \vec{\mathrm{p}}_B) = 0$$

Consequentemente

$$\vec{\mathrm{p}}_A + \vec{\mathrm{p}}_B = \text{constante}$$

Então, de acordo com a terceira lei, o momentum linear total de dois corpos que interagem permanece sempre constante.

A conservação do momentum linear de dois corpos que interagem é um caso especial de uma regra mais geral, a saber: o momentum linear de qualquer sistema isolado permanece constante no tempo. Discutiremos detalhadamente esta regra mais tarde. Ela é conhecida como a **lei de conservação do momentum linear** e é uma das leis mais básicas da física. Supõe-se que sua validade se estende àqueles casos nos quais a mecânica Newtoniana falha.

2.5 Movimento de uma Partícula

A equação fundamental do movimento de uma partícula é dada pela segunda lei de Newton, Equação (2.4). Quando uma partícula estiver sob a influência de mais de uma força, observar-se-á experimentalmente que elas se somam vetorialmente, isto é,

$$\vec{\mathrm{F}} = \sum \vec{\mathrm{F}}_i = m\frac{d^2\vec{\mathrm{r}}}{dt^2} = m\vec{\mathrm{a}} \tag{2.8}$$

Conhecendo-se a aceleração da partícula, então a equação do movimento (2.8) dá a força que atua nela. Os problemas usuais da dinâmica da partícula, entretanto, são aqueles nos quais as forças são funções conhecidas das coordenadas incluindo o tempo, e o objetivo é encontrar a posição da partícula em função do tempo. Isto envolve a solução de um conjunto de equações diferenciais. Em alguns problemas é impossível obter soluções das equações diferenciais do movimento em termos de funções analíticas. Neste caso, devemos utilizar métodos de aproximação. Em muitas aplicações práticas, tais como balística, movimento de satélites, etc, as equações diferenciais são tão complicadas que é necessário recorrer à integração numérica, frequentemente utilizando computadores, para predizer o movimento.

2.6 Movimento Retilíneo — Aceleração Constante

Quando uma partícula móvel permanecer em uma única linha reta, o movimento será dito retilíneo. Neste caso, sem perda de generalidade poderemos colocar o eixo x na direção do movimento. A equação geral do movimento poderá ser escrita

$$F(x, \dot{x}, t) = m\ddot{x}$$

Consideremos alguns casos especiais nos quais a integração da equação do movimento possa ser feita por métodos elementares.

A situação mais simples será aquela na qual a força for constante. Neste caso, a aceleração será constante

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = \text{constante} = a$$

e a solução será facilmente obtida por integração direta em relação ao tempo.

$$v = at + v_0 \tag{2.9}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \tag{2.10}$$

onde v_0 é a velocidade inicial e x_0 a posição inicial. Eliminando o tempo nas Equações (2.9) e (2.10), obtemos

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2 \tag{2.11}$$

O leitor reconhecerá nas equações acima as equações do movimento uniformemente acelerado. Existem numerosas aplicações fundamentais. Por exemplo, a aceleração de um corpo em queda livre próximo à superfície da Terra, desprezando a resistência do ar, é aproximadamente constante. Representaremos a aceleração de um corpo em queda livre por $\vec{\mathrm{g}}$. (Em

módulo, $g = 9,8\text{m/s}^2$). A força da gravidade (peso), cujo sentido é para baixo, é consequentemente igual a $m\vec{g}$. A força gravitacional está sempre presente independentemente do movimento do corpo, onde outras forças podem estar atuando.

Exemplo

Considere uma partícula que escorrega para baixo num plano liso inclinado de um ângulo θ em relação à horizontal como ilustrado na Figura 2.1(a). Colocamos o eixo x na direção paralela ao plano inclinado e o orientamos positivamente para baixo, como indicado.

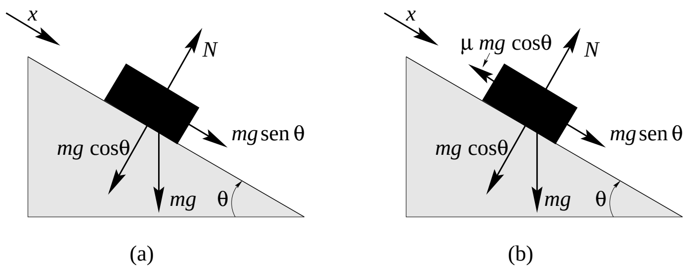


Figura 2.1: Uma partícula deslizando para baixo em um plano inclinado (a) liso; (b) com atrito.

A componente da força gravitacional na direção x vale $mg\,\text{sen}\,\theta$. É uma constante e por isso o movimento é descrito pelas Equações (2.9), (2.10) e (2.11) onde

$$a = \frac{F}{m} = g\,\text{sen}\,\theta$$

Vamos supor que, ao invés de liso, o plano fosse rugoso, isto é, que exercesse uma força de atrito $\vec{f}$ na partícula. Então, como ilustrado na Figura 2.1(b), a força resultante na direção x seria igual a $mg\,\text{sen}\,\theta - f$. No caso de um corpo deslizando sobre outro observamos que o módulo da força de atrito é proporcional ao módulo da força normal N, isto é,

$$f = \mu N$$

onde a constante de proporcionalidade μ é o coeficiente de atrito cinético. No exemplo em questão a força normal N, como pode ser visto na figura, é igual a $mg\cos\theta$, portanto

$$f = \mu mg\cos\theta$$

Consequentemente, a força resultante na direção x seria igual a

$$mg\,\text{sen}\,\theta - \mu mg\cos\theta$$

Novamente a força seria constante e as Equações (2.9), (2.10) e (2.11) poderiam ser aplicadas com

$$a = \frac{F}{m} = g(\text{sen}\,\theta - \mu\cos\theta)$$

A velocidade da partícula crescerá se a expressão entre parênteses for positiva, isto é se $\theta > \operatorname{arctg}\mu$. O ângulo $\operatorname{arctg}\mu$, usualmente representado por ϵ, é chamado ângulo de atrito. Se $\theta = \epsilon$, então $a = 0$, e a partícula deslizará para baixo com velocidade constante. Se $\theta < \epsilon$, então a será negativo e a partícula eventualmente irá parar. Devemos notar que no caso de movimento para cima a força de atrito terá seu sentido invertido em relação ao caso anterior; isto é, terá o sentido de x positivo. A aceleração (realmente desaceleração) será então

$$a = g(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)$$

2.7 O Conceito de Energias Cinética e Potencial

Ocorre geralmente que a força que atua sobre uma partícula depende de sua posição em relação a outros corpos. Isto é verdade no caso de, por exemplo, forças eletrostáticas ou gravitacionais e tensão ou compressão elásticas. Se a força independesse da velocidade e do tempo, a equação diferencial para movimentos retilíneos seria simplesmente

$$F(x) = m\ddot{x}$$

Usualmente é possível resolver esse tipo de equação diferencial por vários métodos. Uma maneira útil e significativa é escrever a aceleração na forma abaixo

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{d\dot{x}}{dx} = v\frac{dv}{dx}$$

e a equação diferencial do movimento pode ser escrita

$$F(x) = mv\frac{dv}{dx} = \frac{m}{2}\frac{d(v^2)}{dx} = \frac{dT}{dx} \tag{2.12}$$

A quantidade $T = \frac{1}{2}mv^2$ é chamada energia cinética da partícula. Podemos expressar a Equação (2.12) na forma integral

$$\int F(x)dx = \int dT = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \text{constante}$$

A integral $\int F(x)dx$ é o trabalho realizado sobre a partícula pela força $F(x)$. Vamos definir a função $V(x)$ tal que

$$-\frac{dV}{dx} = F(x) \tag{2.13}$$

A função $V(x)$ é chamada *energia potencial.* Ela é definida a menos de uma constante arbitrária. Em termos de $V(x)$ o trabalho é

$$\int F(x)dx = -\int \frac{dV}{dx}dx = -V(x) + \text{constante}$$

consequentemente podemos escrever

$$T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \text{constante} = E \tag{2.14}$$

chamamos a constante E de energia total. Dito de outra maneira: Para o movimento unidimensional, se a força exercida sobre a partícula for uma função da posição apenas, então a soma da energia potencial e cinética permanecerá constante durante todo o movimento. Neste caso, a força será dita conservativa. (No próximo Capítulo encontraremos uma discussão mais completa sobre força conservativa). Forças não conservativas, ou seja, aquelas para as quais não existir uma função energia potencial, são usualmente de natureza dissipativa, tal como o atrito.

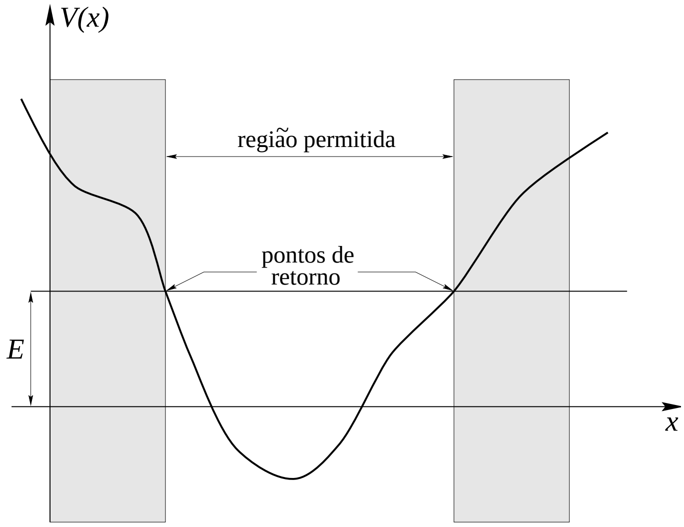


Figura 2.2: Gráfico da função energia potencial mostrando a região permitida e os pontos de retorno do movimento para um dado valor da energia total E.

O movimento da partícula pode ser obtido explicitando v na equação de conservação de energia (2.14).

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]} \tag{2.15}$$

que pode ser escrita na forma de uma integral

$$\int \frac{\pm dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}} = t \tag{2.16}$$

dando t em função de x.

Vemos, na Equação (2.15), que a velocidade só será real para valores de x tais que $V(x)$ seja menor ou igual à energia total E. Fisicamente, isso significa que a partícula está confinada às regiões para as quais $V(x) \leq E$. Além disso, a velocidade se anula nos pontos onde $V(x) = E$. Isto é, a partícula deve parar e inverter seu movimento nestes pontos. Eles são chamados pontos de retorno do movimento. A Figura 2.2 ilustra essa discussão.

Exemplo

O movimento de um corpo em queda livre discutido anteriormente como exemplo de força constante é um caso especial de movimento conservativo. Orientando o eixo x positivo para cima, a força gravitacional será $-mg$ e a função energia potencial $V = mgx + C$. C é uma constante arbitrária cujo valor depende meramente da escolha do nível de referência para V. Para $C = 0$, a energia total será

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

Vamos supor, por exemplo, que um corpo seja lançado para cima com velocidade inicial v_0. Fazendo $x = 0$ no ponto de lançamento

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

O ponto de retorno é aquele no qual a altura atingida pelo corpo é máxima. Nós o obtemos fazendo $\dot{x} = 0$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgx_{max}$$

ou

$$h = x_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Integrando a equação de energia obtemos para este movimento

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - 2gx}} &= t \\ \frac{v_0}{g} - \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gx} &= t \end{aligned}$$

O leitor deve verificar que esta expressão se reduz à mesma relação entre x e t dada pela Equação (2.10) quando se coloca $a = -g$.

2.8 Força em Função do Tempo — Conceito de Impulso

Se for possível expressar a força que atua sobre as partículas em termos de uma função explícita do tempo então a equação do movimento será

$$F(t) = m\frac{dv}{dt}$$

Esta equação pode ser integrada diretamente dando o momentum linear (e portanto a velocidade) em função do tempo

$$\int F(t)dt = mv(t) + C \tag{2.17}$$

onde C é uma constante de integração. A integral $\int F(t)dt$, chamada impulso, é igual ao momentum linear comunicado à partícula pela força $F(t)$. (O uso do conceito de impulso será retomado no Capítulo 4).

A posição da partícula em função do tempo pode ser obtida por uma segunda integração como se segue

$$x = \int v(t)dt = \int \left[\int \frac{F(t')dt'}{m} \right] dt \tag{2.18}$$

Devemos notar que a solução da equação poderá ser escrita como uma simples integral dupla apenas nos casos em que a força for uma função explícita do tempo. Para todos os outros casos devemos usar os vários métodos para se resolver equação diferencial de segunda ordem a fim de obtermos a posição x em termos do tempo t.

Exemplo

Um bloco está inicialmente em repouso numa superfície horizontal lisa. No instante $t = 0$ aplica-se uma força horizontal uniformemente crescente: $F = ct$. Encontre a velocidade e o deslocamento em função do tempo.

A equação diferencial do movimento é

$$ct = m\frac{dv}{dt}$$

Então

$$v = \frac{1}{m}\int_0^t ctdt = \frac{ct^2}{2m}$$

e

$$x = \int_0^t \frac{ct^2}{2m}dt = \frac{ct^3}{6m}$$

onde a posição inicial do corpo é na origem $(x = 0)$.

2.9 Força Dependente da Velocidade

Frequentemente ocorre que a força que atua numa partícula é função da velocidade da partícula. É o caso de, por exemplo, resistência viscosa exercida em um corpo que se move através de um fluido. No caso de resistência exercida por um fluido, observamos que para baixas velocidades a força é aproximadamente proporcional à velocidade, enquanto que para altas velocidades a proporcionalidade ao quadrado é mais conveniente. Se não houver outras forças atuando, a equação do movimento poderá ser escrita

$$F(v) = m\frac{dv}{dt}$$

Integrando uma única vez obtemos t em função de v

$$t = \int \frac{mdv}{F(v)} = t(v) \tag{2.19}$$

Podemos omitir a constante de integração porque seu valor depende somente da escolha da origem do tempo. Supondo que v possa ser explicitado na equação acima, isto é,

$$v = v(t)$$

então uma segunda integração nos dará a posição x em função de t

$$x = \int v(t)dt = x(t) \tag{2.20}$$

Exemplo

Vamos supor que lançamos um corpo com velocidade inicial v_0 num plano horizontal liso, mas que existe uma resistência do ar proporcional a v; isto é, $F(v) = -cv$, onde c é uma constante de proporcionalidade. (O eixo x está ao longo da direção do movimento). A equação diferencial do movimento é

$$-cv = m\frac{dv}{dt}$$

Integrando, teremos

$$t = \int_{v_0}^{v} -\frac{mdv}{cv} = -\frac{m}{c}\ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$$

Multiplicando ambos os membros por $-\frac{c}{m}$ e tomando o exponencial obteremos facilmente v em função de t. O resultado é

$$v = v_0 e^{-\frac{ct}{m}}$$

A velocidade decresce exponencialmente com o tempo. Uma segunda integração nos dará

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t v_0 e^{-\frac{ct}{m}} dt \\ &= \frac{mv_0}{c}\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) \end{aligned}$$

Vemos, da equação acima, que o corpo nunca ultrapassará a distância limite mv_0/c.

2.10 Movimento Vertical num Meio Resistivo Velocidade Terminal

Um objeto caindo verticalmente no ar ou através de qualquer fluido está sujeito à resistência viscosa. Se a resistência for proporcional à primeira potência de v (caso linear) poderemos expressar esta força como $-cv$ independentemente do sinal de v, uma vez que a força de resistência é sempre oposta ao sentido do movimento. A constante de proporcionalidade c depende do tamanho e forma do objeto e da viscosidade do fluido. Consideremos o sentido para cima positivo. A equação diferencial do movimento será

$$-mg - cv = m\frac{dv}{dt}$$

Considerando g constante, teremos o caso de força dependente da velocidade, e poderemos escrever

$$t = \int \frac{mdv}{F(v)} = \int_{v_0}^{v} \frac{mdv}{-mg - cv} = -\frac{m}{c} \ln \frac{mg + cv}{mg + cv_0}$$

Facilmente poderemos explicitar v

$$v = -\frac{mg}{c} + \left(\frac{mg}{c} + v_0\right) e^{-\frac{ct}{m}} \tag{2.21}$$

Depois de um tempo suficientemente grande ($t \gg m/c$) o termo exponencial será desprezível, e a velocidade se aproximará do valor limite $-\frac{mg}{c}$. A velocidade limite de um corpo em queda é chamada de velocidade terminal; é aquela velocidade na qual a força de resistência seja exatamente igual e oposta ao peso do corpo tal que a força resultante seja nula. O módulo da velocidade terminal de uma gota de chuva, por exemplo, é de 3 a 6 metros por segundo, dependendo do seu tamanho.

A Equação (2.21) expressa v em função de t, então uma segunda integração dará x em função de t:

$$x - x_0 = \int_0^t v(t)dt = -\frac{mgt}{c} + \left(\frac{m^2 g}{c^2} + \frac{mv_0}{c}\right)\left(1 - e^{-\frac{ct}{m}}\right) \tag{2.22}$$

Vamos designar a velocidade terminal $\frac{mg}{c}$ por v_t e m/c por τ (que chamaremos de tempo característico). A Equação (2.21) pode então ser escrita da forma mais significativa

$$v = -v_t + (v_t + v_0)e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{2.23}$$

Então, um objeto que cai a partir do repouso ($v_0 = 0$) atingirá a velocidade de $(1 - e^{-1})$ vezes a velocidade terminal em um intervalo de tempo τ, $(1 - e^{-2})v_t$ no intervalo 2τ, e assim por diante. Depois de um intervalo de 10τ a velocidade será praticamente igual a velocidade terminal, a saber $0,99995 v_t$.

Se a resistência viscosa for proporcional a v^2 (caso quadrático), a equação diferencial do movimento será, lembrando que consideramos o sentido para cima positivo,

$$-mg \pm cv^2 = m\frac{dv}{dt}$$

O sinal negativo para o termo de resistência se refere à subida (v positivo), e o sinal positivo à descida. O duplo sinal é necessário no caso da força que envolve potência par de v. Como no caso anterior, a equação diferencial do movimento pode ser integrada dando t em função de v:

$$t = \int \frac{mdv}{-mg - cv^2} = -\tau \mathrm{arctg}\frac{v}{v_t} + t_0 \qquad \text{(subida)}$$

$$t = \int \frac{mdv}{-mg + cv^2} = -\tau \mathrm{arctgh}\frac{v}{v_t} + t_0' \qquad \text{(descida)}$$

onde

$$\sqrt{\frac{m}{cg}} = \tau \qquad \text{(tempo característico)}$$

e

$$\sqrt{\frac{mg}{c}} = v_t \qquad \text{(velocidade terminal)}$$

Explicitando v,

$$v = v_t \,\mathrm{tg}\left(\frac{t_0 - t}{\tau}\right) \qquad \text{(subida)} \tag{2.24}$$

$$v = -v_t \,\mathrm{tgh}\left(\frac{t - t_0'}{\tau}\right) \qquad \text{(descida)} \tag{2.25}$$

Se o corpo for abandonado em repouso em $t = 0$ então $t_0' = 0$. Da definição de tangente hiperbólica,

$$v = -v_t \,\mathrm{tgh}\frac{t}{\tau} = -v_t \left(\frac{e^{t/\tau} - e^{-t/\tau}}{e^{t/\tau} + e^{-t/\tau}}\right)$$

Novamente, depois de um intervalo de tempo de alguns tempos característicos, praticamente obtemos a velocidade terminal, por exemplo, para $t = 5\tau$, a velocidade é $0,99991 v_t$. A Figura 2.3 mostra os gráficos da velocidade em função do tempo de queda para leis de resistência dos tipos linear e quadrática. É interessante notar que em ambos os casos, o tempo característico é igual a v_t/g. Por exemplo, se a velocidade terminal de um paraquedas é de 1,2 m/s, o tempo característico será de

$$\frac{1,2\,\mathrm{m/s}}{9,8\,\mathrm{m/s^2}} = 0,12\,\mathrm{s}$$

Podemos integrar as Equações (2.24) e (2.25) para obtermos expressões explícitas da posição em função do tempo.

2.11 Variação da Gravidade com a Altura

Na Seção precedente consideramos g constante. Realmente, a atração gravitacional da Terra sobre um corpo situado acima de sua superfície varia com o inverso do quadrado da distância. (Lei de Newton da gravitação). Então a força gravitacional num corpo de massa m é

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

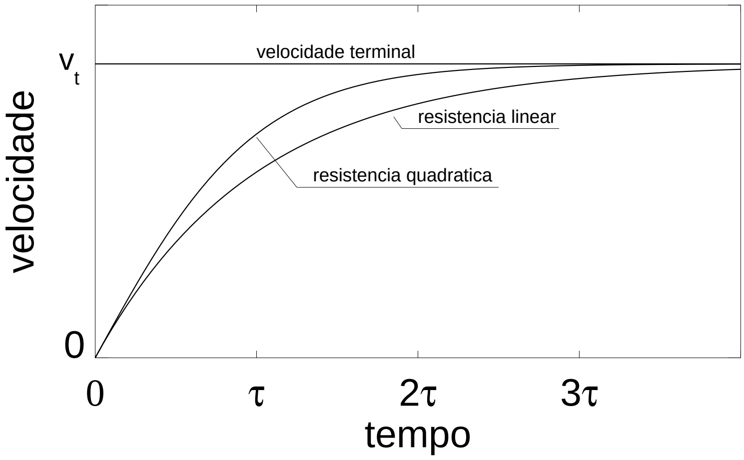


Figura 2.3: Gráfico da velocidade em função do tempo de queda para um corpo sujeito a resistência do ar dos tipos linear e quadrática.

onde G é a constante universal da gravitação, M a massa da Terra, e r a distância do centro da Terra ao corpo. Pode-se ver por inspeção que este tipo de força é obtida de uma função energia potencial que varia com o inverso da distância

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

onde

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

Se desprezarmos a resistência do ar, a equação diferencial para movimento vertical é

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} \tag{2.26}$$

Escrevendo $\ddot{r} = \dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}$ podemos integrar em relação a r e obter

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} = E \tag{2.27}$$

onde E é a constante de integração. Esta é, de fato, a equação da conservação da energia: a soma da energia cinética e potencial permanece constante durante o movimento de um corpo em queda.

Vamos aplicar a equação de energia ao caso de um projétil lançado para cima com velocidade v_0 a partir da superfície da Terra. A constante E é dada pelas condições iniciais,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_T} = E \tag{2.28}$$

onde r_T é o raio da Terra. A velocidade em função da altura x é obtida combinando-se as Equações (2.27) e (2.28). O resultado é

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{r_T + x} - \frac{1}{r_T}\right) \tag{2.29}$$

onde $r = r_T + x$. Da Equação (2.26), temos que a aceleração da gravidade na superfície da Terra

$$g = \frac{GM}{r_T^2}$$

A fórmula para a velocidade pode então ser escrita como

$$v^2 = v_0^2 - 2gx\left(1 + \frac{x}{r_T}\right)^{-1} \tag{2.30}$$

A equação acima se reduz à fórmula familiar para um campo gravitacional uniforme

$$v^2 = v_0^2 - 2gx$$

quando x for muito menor do que r_T tal que o termo $\frac{x}{r_T}$ possa ser desprezado em comparação com a unidade.

O ponto de retorno do movimento do projétil, isto é, a altura máxima atingida, será obtido colocando $v = 0$ e explicitando x. O resultado será

$$x_{max} = h = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{v_0^2}{2gr_T}\right)^{-1} \tag{2.31}$$

Novamente obteremos a fórmula usual

$$h = \frac{v_0^2}{2g}$$

se desprezarmos o segundo termo.

Finalmente, vamos aplicar a fórmula exata (2.31) para obtermos a velocidade de escape, isto é, o valor de v_0 para o qual h seja infinito. É claro que isto ocorre quando a quantidade entre parênteses for igual a zero. O resultado é

$$v_e = \sqrt{2gr_T}$$

o que dá

$$v_e \approx 11\,\text{km/s} = 11 \times 10^3\,\text{m/s}$$

para a velocidade de escape da superfície da Terra.

Na atmosfera terrestre, a velocidade média das moléculas de ar (O_2 e N_2) é de aproximadamente 0,5 km/s, que é consideravelmente menor que a velocidade de escape, então a Terra retém sua atmosfera. (De acordo com a teoria cinética dos gases, a velocidade média das moléculas de um gás é igual a $\sqrt{\frac{3kT}{m}}$ onde k é a constante de Boltzmann ($1,38 \times 10^{-16}$ erg/K) e T é a temperatura absoluta). A Lua, por outro lado, não tem atmosfera porque a velocidade de escape na sua superfície, devido à pequena massa, é consideravelmente menor do que na

superfície da Terra; qualquer molécula de oxigênio ou nitrogênio eventualmente escaparia. A atmosfera da Terra, entretanto, não contém uma quantidade significativa de hidrogênio, embora ele seja o elemento mais abundante no universo como um todo. A atmosfera de hidrogênio teria escapado da superfície da Terra a muito tempo porque sua velocidade molecular é suficientemente grande (devido à pequena massa da molécula de hidrogênio) tal que um número significativo de moléculas teria, em cada instante, velocidade maior do que a velocidade de escape.

2.12 Força Restauradora Linear — Movimento Harmônico

Um dos casos mais importantes de movimento retilíneo, tanto sob o ponto de vista prático quanto teórico, é aquele provocado por uma força linear restauradora. O módulo desta força é proporcional ao deslocamento da partícula em relação à sua posição de equilibrio e seu sentido se opõe ao deslocamento. Tal força é exercida por uma corda elástica ou por uma mola que obedeça à lei de Hooke

$$F = -k(X - a) = -kx \tag{2.32}$$

onde X é o comprimento total da mola e a o comprimento da mola não deformada. (Sem carga). A variável $x = X - a$ é o deslocamento da mola em relação à sua posição de equilíbrio. A constante de proporcionalidade k é chamada de constante elástica. Consideremos uma partícula de massa m presa a uma mola como mostra a Figura (2.4a); a força que atua na partícula é dada pela Equação (2.32). Consideremos a mesma mola dependurada verticalmente e tendo a mesma partícula presa no seu extremo. A força total que atua na partícula é

$$F = -k(X - a) + mg \tag{2.33}$$

onde o sentido positivo é para baixo. Agora, neste último caso, medimos x relativamente à nova posição de equilíbrio, isto é, tomamos $x = X - a - \frac{mg}{k}$. Assim temos novamente $F = -kx$, e a equação do movimento, em ambos os casos, é

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.34}$$

Esta equação diferencial do movimento é encontrada em uma grande variedade de problemas físicos. No exemplo particular que estamos usando aqui, as constantes m e k se referem à massa do corpo e à constante elástica da mola, respectivamente, e o deslocamento x é um comprimento. A mesma equação é encontrada, como veremos mais tarde, no caso de um pêndulo, onde o deslocamento é um ângulo e as constantes envolvem a aceleração da gravidade e o comprimento do pêndulo. Novamente, esta equação se aplica a certos tipos de circuitos elétricos, onde as constantes representam os parâmetros do circuito e a quantidade x representa a corrente elétrica ou a voltagem.

A Equação (2.34) pode ser resolvida de várias maneiras. É um exemplo de uma importante classe de equações diferenciais conhecidas como *equação diferencial linear com coeficientes constantes*. A equação geral de ordem n deste tipo é

$$C_n \frac{d^n x}{dt^n} + \ldots + C_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + C_1 \frac{dx}{dt} + C_0 x = b(t)$$

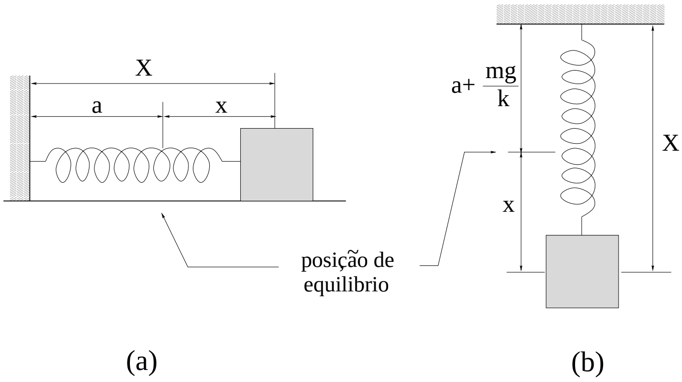


Figura 2.4: Ilustração do oscilador harmônico linear por meio de um bloco de massa m e uma mola. (a) Movimento horizontal. (b) Movimento vertical.

A equação é chamada homogênea se $b = 0$. Muitas, se não a maioria, das equações diferenciais da física são equações diferenciais lineares de 2ª ordem. A fim de resolver a Equação (2.34) utilizaremos o método das tentativas experimentando como solução a função Ae^{qt} onde q é uma constante a ser determinada. Se $x = Ae^{qt}$ for, de fato, uma solução, então para todos os valores de t teremos

$$m\frac{d^2}{dt^2}(Ae^{qt}) + k(Ae^{qt}) = 0$$

o que, depois de cancelarmos os fatores comuns, se reduz a equação, (esta equação é chamada equação auxiliar)

$$mq^2 + k = 0$$

ou seja

$$q = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$$

onde $i = \sqrt{-1}$, e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. As soluções das equações diferenciais lineares são aditivas. (Isto é, se f_1 e f_2 forem soluções, então a soma $f_1 + f_2$ também será uma solução). A solução da Equação (2.34) é então

$$x = A_+e^{i\omega_0 t} + A_-e^{-i\omega_0 t} \tag{2.35}$$

Desde que $e^{iu} = \cos u + i \operatorname{sen} u$,

$$x = a \operatorname{sen}\omega_0 t + b\cos\omega_0 t \tag{2.36}$$

ou

$$x = A\cos(\omega_0 t + \theta_0) \tag{2.37}$$

são formas alternativas da solução. As constantes de integração nas soluções acima são determinadas a partir das condições iniciais. Por substituição direta podemos verificar que todas as três expressões são soluções da Equação (2.34). O movimento é uma oscilação

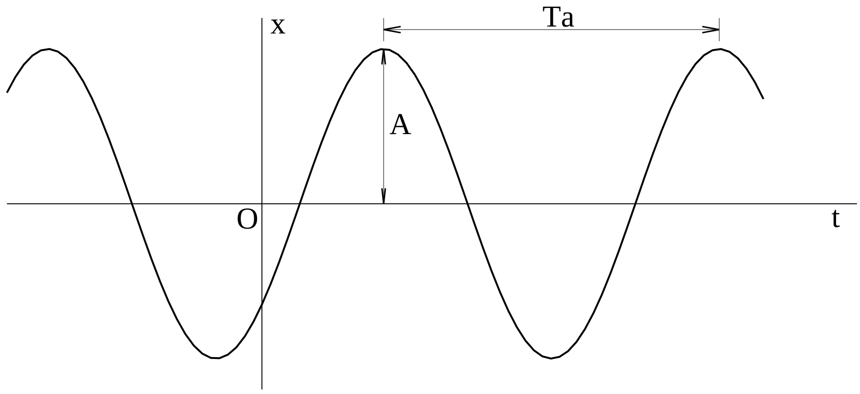


Figura 2.5: Gráfico do deslocamento em função do tempo para o oscilador harmônico.

senoidal do deslocamento x. Por esta razão a Equação (2.34) é frequente chamada de equação diferencial do oscilador harmônico ou oscilador linear.

O coeficiente ω_0 é chamado frequência angular. O valor máximo de x é chamado amplitude da oscilação; é a constante A na Equação (2.37), ou $\sqrt{a^2+b^2}$ na Equação (2.36). O período T da oscilação é o tempo requerido para um ciclo completo, como mostra a Figura 2.5, isto é, o período é o tempo para o qual o produto $\omega_0 t$ aumenta de exatamente 2π, então

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2.38}$$

A frequência linear de oscilação f_0 é, por definição, o número de ciclos por unidade de tempo, portanto

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\pi f_0 \\ f_0 &= \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \tag{2.39}$$

É comum empregar-se a palavra frequência para designar tanto a frequência angular quanto a linear; fica claro do contexto a qual delas estamos nos referindo.

Exemplo

Uma mola leve se distende de b quando equilibra um bloco de massa m. Encontre o movimento resultante em função de t sabendo-se que no instante $t = 0$ o bloco foi abandonado em repouso a uma distância l abaixo de sua posição de equilíbrio. Primeiro, a fim de obtermos a constante da mola, notamos que na condição de equilíbrio estático

$$F = -kb + mg = 0$$

tal que

$$k = \frac{mg}{b}$$

Portanto a frequência angular de oscilação é

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{b}}$$

Para obtermos as constantes da equação de movimento

$$x = A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

vamos fazer

$$x = l \quad \text{e} \quad \dot{x} = 0$$

no instante $t = 0$. Mas

$$\dot{x} = -A\omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \theta_0)$$

e então

$$A = l \quad \text{e} \quad \theta_0 = 0$$

logo

$$x = l\cos\left(\sqrt{\frac{g}{b}}t\right)$$

é a expressão desejada.

2.13 Considerações de Energia no Movimento Harmônico

Considere uma partícula movendo-se sob a ação de uma força restauradora linear $F = -kx$. Vamos calcular o trabalho W realizado por uma força externa F_a para levar a partícula da posição de equilíbrio ($x = 0$) a uma posição genérica x. Temos

$$F_a = -F = kx$$

e

$$W = \int F_a dx = \int_0^x (kx)dx = \frac{k}{2}x^2$$

O trabalho W fica armazenado na mola na forma de energia potencial

$$V(x) = W = \frac{k}{2}x^2 \tag{2.40}$$

A definição de V, Equação (2.13), requer que $F = -\frac{dV}{dx} = -kx$. A energia total será então dada pela soma das energias cinética e potencial

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{2.41}$$

Podemos escrever a velocidade em função do deslocamento

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}$$

e integrar a fim de obtermos t em função de x, como segue

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2\frac{E}{m} - \frac{k}{m}x^2}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos\left(\frac{x}{A}\right) + C$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}}$$

e C é a constante de integração. Depois de integrar obtemos a mesma relação encontrada na Seção precedente, exceto que agora temos um valor explícito para a amplitude A. Poderíamos ter obtido a amplitude diretamente a partir da equação da energia (2.41) lembrando que x deve situar-se entre $\sqrt{2E/k}$ e $-\sqrt{2E/k}$ a fim de que $\dot{x}$ seja real. Isto está ilustrado na Figura 2.6 que mostra a função energia potencial e os pontos de retorno do movimento para diferentes valores da energia total E.

Da equação da energia vemos que o valor máximo de $\dot{x}$, que chamaremos v_{max}, ocorre em $x = 0$, e então teremos

$$E = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

ou

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \omega_0 A$$

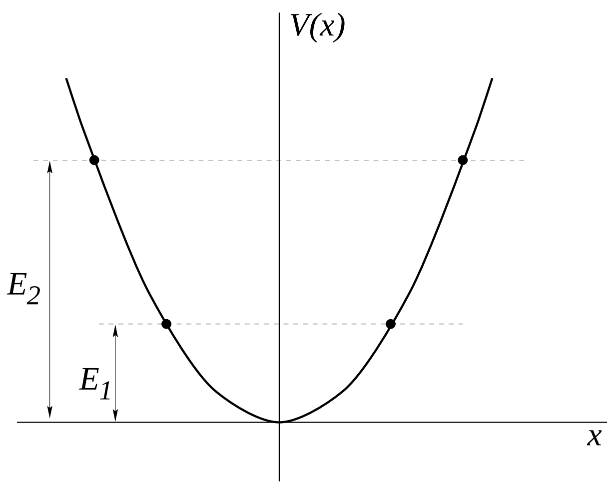


Figura 2.6: Gráfico da função energia potencial do oscilador harmônico. Mostra-se os pontos de retorno definindo a amplitude para dois valores de energia total.

2.14 Movimento Harmônico Amortecido

A análise do oscilador harmônico feita acima é idealizada uma vez que não levamos em conta as forças de atrito. Pequenas ou não elas estão sempre presentes nos sistemas mecânicos. Analogamente, existe sempre resistência nos circuitos elétricos. Vamos considerar, por exemplo, o movimento de um objeto dependurado em uma mola de constante k. Vamos supor que exista uma força viscosa retardadora variando linearmente com a velocidade (como na Seção 2.8), ou seja, tal como aquela produzida pela resistência do ar. As forças estão indicadas na Figura 2.7.

Sendo x o deslocamento em relação à posição de equilíbrio, então a força restauradora exercida pela mola será $-kx$, e a força retardadora $-c\dot{x}$, onde c é uma constante de proporcionalidade. A equação diferencial do movimento $F = m\ddot{x}$ será portanto $-kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$ ou, rearranjando os termos

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{2.42}$$

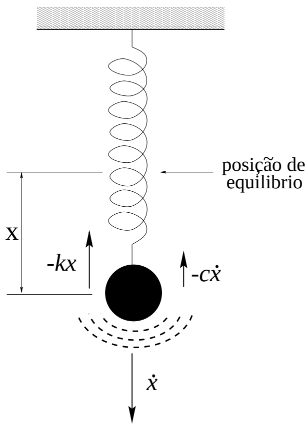


Figura 2.7: O oscilador harmônico amortecido.

Novamente tentaremos uma solução do tipo exponencial Ae^{qt}, que deverá satisfazer a equação

$$m\frac{d^2}{dt^2}(Ae^{qt}) + c\frac{d}{dt}(Ae^{qt}) + k(Ae^{qt}) = 0$$

para qualquer t. Isto ocorrerá se q satisfizer a equação auxiliar $mq^2 + cq + k = 0$. As raízes são dadas pela fórmula quadrática

$$q = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \tag{2.43}$$

Existem três casos fisicamente distintos

i.	$c^2 > 4mk$	super-amortecimento
ii.	$c^2 = 4mk$	amortecimento crítico
iii.	$c^2 < 4mk$	sub-amortecido

i) No primeiro caso, vamos chamar $-\gamma_1$ e $-\gamma_2$ os dois valores reais de q dado pela Equação (2.43). A solução geral poderá ser escrita

$$x = A_1 e^{-\gamma_1 t} + A_2 e^{-\gamma_2 t} \tag{2.44}$$

Vemos que o movimento é não oscilatório, o deslocamento x decai a zero de uma maneira exponencial a medida que o tempo passa, como mostra a Figura 2.8.

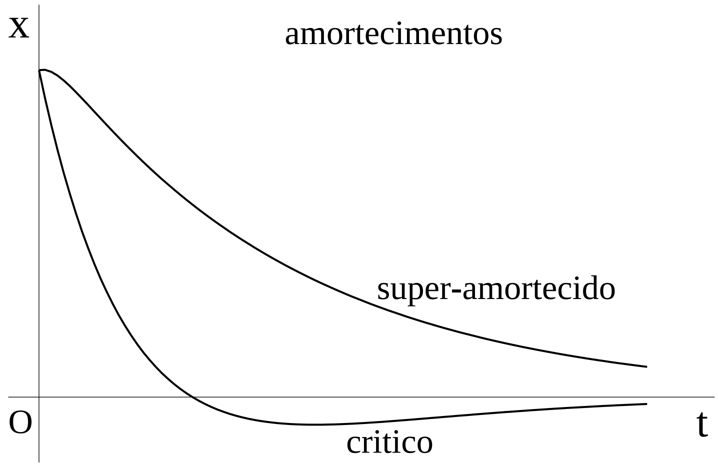


Figura 2.8: Gráficos do deslocamento em função do tempo para os casos super-amortecido e amortecimento crítico do oscilador harmônico.

ii) No caso de amortecimento crítico as duas raízes são iguais, e a Equação (2.44) não representará a solução geral desde que existe apenas uma função $e^{-\gamma t}$ e uma única constante $(A_1 + A_2)$, onde $\gamma = c/2m$. Para obtermos a solução geral neste caso voltaremos à equação diferencial original (2.42). Para raízes iguais esta equação pode ser fatorada

$$\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right)\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right) x = 0$$

Fazendo a substituição $u = \gamma x + \frac{dx}{dt}$ teremos

$$\left(\frac{d}{dt} + \gamma\right) u = 0$$

o que é facilmente integrável dando $u = A_1 e^{-\gamma t}$. Portanto, da definição de u, $\gamma x + dx/dt = A_1 e^{-\gamma t}$ que também pode ser escrito

$$A_1 = \left(\gamma x + \frac{dx}{dt}\right) e^{\gamma t} = \frac{d}{dt}(x e^{\gamma t})$$

Uma segunda integração em relação a t dá $A_1 t = x e^{\gamma t} - A_2$, ou finalmente

$$x = e^{-\gamma t}(A_1 t + A_2) \tag{2.45}$$

Esta equação representa um movimento não oscilatório, o deslocamento x decaindo a zero assintoticamente com o tempo, Figura 2.8. O amortecimento crítico produz um ótimo retorno à posição de equilíbrio para aplicações práticas tais como suspensões de galvanômetros, etc.

iii) Se a constante de resistência c for suficientemente pequena tal que $c^2 < 4mk$, teremos o terceiro caso: sub-amortecimento. Neste caso q será complexo. As duas raízes da equação auxiliar serão números conjugados complexos e o movimento será dado pela solução geral

$$x = A_+ e^{(-\gamma + i\omega_1)t} + A_- e^{(-\gamma - i\omega_1)t} \tag{2.46}$$

onde $\gamma = \frac{c}{2m}$, e

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{2.47}$$

$$x = e^{-\gamma t}(a \operatorname{sen} \omega_1 t + b \cos \omega_1 t) \tag{2.48}$$

onde $a = i(A_+ - A_-)$ e $b = (A_+ + A_-)$. Podemos também escrever a solução como

$$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \theta_0) \tag{2.49}$$

onde

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad \theta_0 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b}\right)$$

A forma real da solução mostra que o movimento é oscilatório, e que a amplitude $Ae^{-\gamma t}$ decai exponencialmente com o tempo. Além disso, notamos que a frequência angular de oscilação ω_1 é menor que a do oscilador não amortecido ω_0. A frequência ω_1 é chamada frequência natural.

No caso de amortecimento fraco, ou seja se γ for muito pequeno comparado a ω_0, podemos usar a relação aproximada

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0} \tag{2.50}$$

que é obtida expandindo-se em série o lado direito da Equação (2.47) pelo uso do teorema binomial e retendo somente os dois primeiros termos.

A Figura 2.9 mostra o gráfico do movimento. Da Equação (2.49) segue que as duas curvas $x = Ae^{-\gamma t}$ e $x = -Ae^{-\gamma t}$ formam um envoltório da curva do movimento uma vez que o cosseno toma valores entre $+1$ e -1 nos pontos onde a curva toca o envoltório. Os pontos de contato estão separados por um intervalo de tempo de meio período, ou π/ω_1, mas estes pontos não são os máximos e os mínimos do deslocamento x. Fica para o leitor encontrar os valores de t nos quais o deslocamento assume valores extremos.

Considerações de Energia

A energia do oscilador harmônico amortecido é, em qualquer instante, igual à soma da energia cinética $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ e da energia potencial $\frac{1}{2}kx^2$:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

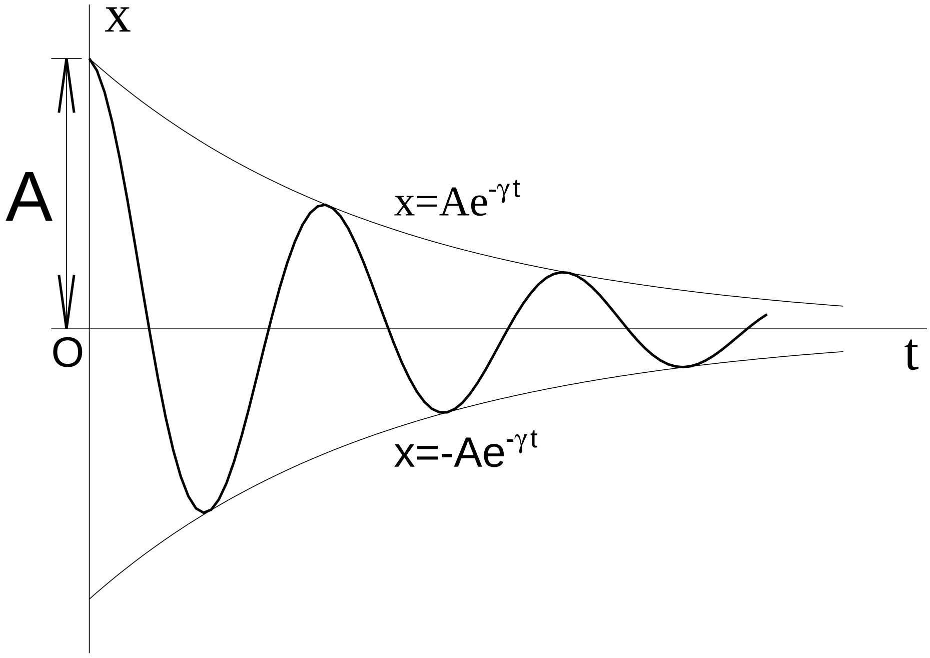


Figura 2.9: Gráfico do deslocamento em função do tempo para o oscilador harmônico sub-amortecido.

No oscilador não amortecido E é constante. Vamos diferenciar a equação acima em relação a t a fim de obtermos a taxa temporal de variação de E. Temos então

$$\frac{dE}{dt} = m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = (m\ddot{x} + kx)\dot{x}$$

Mas, da equação diferencial do movimento, Equação (2.42)

$$m\ddot{x} + kx = -c\dot{x}$$

Consequentemente,

$$\frac{dE}{dt} = -c\dot{x}^2 \tag{2.51}$$

É uma quantidade sempre negativa e representa a razão na qual a energia está sendo dissipada na forma de calor pelo atrito.

Exemplos

1. Uma partícula de massa m está presa a uma mola de constante elástica k. O amortecimento é tal que $\gamma = \omega_0/4$. Encontre a frequência natural. Da Equação (2.47) temos

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{16}} = \omega_0\sqrt{\frac{15}{16}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{15}{16}}$$

2. No problema acima, encontre a razão entre as amplitudes de duas oscilações sucessivas. Esta razão, da teoria anterior, é dada por

$$\frac{Ae^{-\gamma T_1}}{A} = e^{-\gamma T_1}$$

onde

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

Portanto, em nosso problema

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0}\sqrt{\frac{16}{15}} = \frac{2\pi}{4\gamma}\sqrt{\frac{16}{15}}$$

ou

$$\gamma T_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{16}{15}} = 1,62$$

Portanto a razão entre as amplitudes de duas oscilações sucessivas é

$$e^{-1,62} = 0,20.$$

2.15 Movimento Harmônico Forçado — Ressonância

Nesta seção estudaremos o movimento do oscilador harmônico amortecido forçado por uma força externa harmônica, isto é, uma força que varia senoidalmente com o tempo. Vamos supor que esta força tenha frequência angular ω e amplitude F_0 e portanto podemos escrever

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega t + \theta)$$

É conveniente, entretanto, usar a forma exponencial

$$F_{ext} = F_0 e^{i(\omega t + \theta)}$$

ao invés da trigonométrica, embora ambas possam ser usadas. (A forma exponencial é equivalente a $F_{ext} = F_0 \cos(\omega t + \theta) + iF_0 \,\mathrm{sen}(\omega t + \theta)$. A equação diferencial resultante será satisfeita se as partes real e imaginária nos dois lados da equação forem iguais). A força total, então, será a soma de três forças: a força elástica restauradora $-kx$, a força de amortecimento viscoso $-c\dot{x}$ e a força externa F_{ext}. A equação diferencial do movimento será portanto

$$-kx - c\dot{x} + F_{ext} = m\ddot{x}$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{ext} = F_0 e^{i(\omega t + \theta)} \tag{2.52}$$

A solução da equação diferencial linear acima é dada pela soma de duas partes, a primeira parte sendo a solução da equação diferencial homogênea $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, que já foi resolvida na Seção precedente; e a segunda parte sendo qualquer solução particular. Como vimos, a solução da equação homogênea representa uma oscilação que eventualmente decai

a zero — é chamado o termo transiente. Estamos interessados na solução que depende da natureza da força aplicada. Uma vez que esta força varia senoidalmente com o tempo e tem amplitude constante, é razoável esperar uma solução para a qual o deslocamento x também tenha uma dependência temporal senoidal. Portanto, para o regime estacionário, tentaremos uma solução da forma

$$x = Ae^{i(\omega t+\theta')}$$

Se esta *função tentativa* for correta teremos

$$m\frac{d^2}{dt^2}\left(Ae^{i(\omega t+\theta')}\right) + c\frac{d}{dt}\left(Ae^{i(\omega t+\theta')}\right) + kAe^{i(\omega t+\theta')} = F_0 e^{i(\omega t+\theta)}$$

para qualquer valor de t. Depois de efetuar as operações indicadas e cancelar os fatores comuns teremos:

$$-m\omega^2 A + i\omega c A + kA = F_0 e^{i(\theta-\theta')} = F_0[\cos(\theta-\theta') + i\,\mathrm{sen}(\theta-\theta')]$$

Identificando as partes real e imaginária, teremos

$$A(k - m\omega^2) = F_0\cos\phi \qquad (2.53)$$

$$c\omega A = F_0\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad (2.54)$$

onde chamamos de ϕ a diferença de fase ou ângulo de fase $\theta - \theta'$. Dividindo a segunda equação pela primeira e usando a identidade $\mathrm{sen}\,\phi/\cos\phi = \mathrm{tg}\,\phi$, obtemos

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \qquad (2.55)$$

Elevando-se ao quadrado ambos os lados das Equações (2.53) e (2.54), somando e lembrando a identidade $\mathrm{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$, obtemos

$$A^2(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2 A^2 = F_0^2$$

Explicitando a amplitude das oscilações no regime estacionário A, teremos

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}} \qquad (2.56)$$

e como, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ e $\gamma = c/2m$, podemos escrever

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \qquad (2.57)$$

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad (2.58)$$

A equação acima relacionando a amplitude A à frequência da força externa é de importância fundamental. O gráfico, Figura 2.10, mostra que A assume um valor máximo numa certa frequência ω_r, chamada de frequência de ressonância.

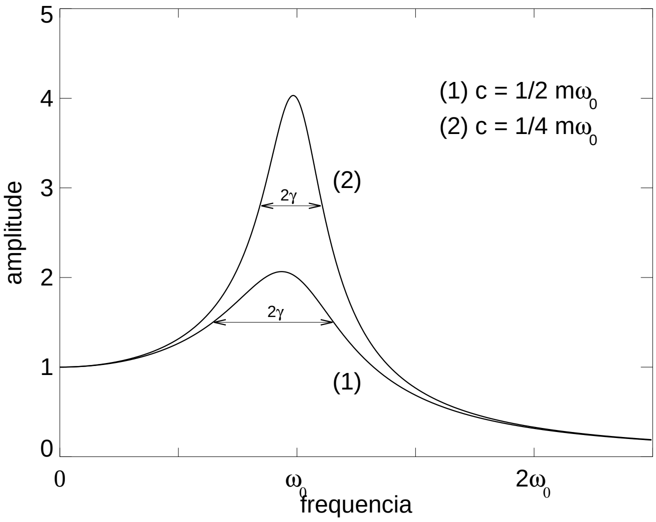


Figura 2.10: Gráfico da amplitude em função da frequência da força externa.

A fim de obtermos a frequência de ressonância calculamos $dA/d\omega$ da Equação (2.58) e igualamos o resultado a zero. Explicitando ω da equação resultante encontramos que a frequência será dada por

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \tag{2.59}$$

No caso de amortecimento fraco, isto é, quando a constante de amortecimento c for muito pequena, $c \ll 2\sqrt{mk}$, ou, equivalentemente, se $\gamma \ll \omega_0$, então a frequência de ressonância ω_r será aproximadamente igual à frequência do oscilador harmônico simples (sem amortecimento) ω_0. Se utilizarmos o teorema binomial para expandir o lado direito da Equação (2.59) retendo apenas os dois primeiros termos, teremos

$$\omega_r \approx \omega_0 - \frac{\gamma^2}{\omega_0} \tag{2.60}$$

As Equações (2.59) e (2.60) devem ser comparadas às Equações (2.47) e (2.50) que dão a frequência de oscilação do oscilador harmônico amortecido. Façamos ϵ representar a quantidade γ^2/ω_0. Então podemos escrever

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2}\epsilon \tag{2.61}$$

para o valor aproximado da frequência natural e

$$\omega_r \approx \omega_0 - \epsilon \tag{2.62}$$

para o valor aproximado da frequência de ressonância.

A amplitude no regime estacionário e na frequência de ressonância, que chamaremos A_{max}, é obtida das Equações (2.58) e (2.59). O resultado é

$$A_{max} = \frac{F_0/m}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{F_0}{c\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

No caso de amortecimento fraco, desprezamos γ^2 e escrevemos

$$A_{max} = \frac{F_0}{2\gamma m\omega_0} = \frac{F_0}{c\omega_0}$$

Então a amplitude da oscilação induzida na condição de ressonância se torna muito grande se a constante de amortecimento for muito pequena, e vice-versa. Em sistemas mecânicos pode ser que seja ou não desejável grandes amplitudes de ressonância. No caso de motores elétricos, por exemplo, usa-se borracha ou suporte de molas para minimizar a transmissão de vibração. A constante elástica de tal suporte é escolhida de maneira a garantir que a frequência de ressonância resultante seja bem diferente da frequência de operação do motor.

A largura do pico de ressonância é frequentemente de interesse. Consideremos o caso de amortecimento fraco $\gamma \ll \omega_0$. Então na expressão para a amplitude no regime estacionário, Equação (2.58), poderemos fazer as seguintes substituições

$$\begin{aligned} \omega_0^2 - \omega^2 &= (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \\ &\approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega) \\ \gamma\omega &\approx \gamma\omega_0 \end{aligned}$$

Estas, juntamente com a expressão para A_{max}, nos permitirá escrever a equação da amplitude na forma

$$A = \frac{A_{max}\gamma}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}} \tag{2.63}$$

A equação acima mostra que quando $|\omega_0 - \omega| = \gamma$, ou equivalentemente, se

$$\omega = \omega_0 \pm \gamma$$

então

$$A^2 = \frac{1}{2}A_{max}^2$$

Sabendo-se que a energia é proporcional a A^2, vemos que 2γ é a diferença de frequência entre os pontos para os quais a energia do oscilador é igual a metade da energia na frequência de ressonância. Então, γ é uma medida da largura da curva de ressonância. Isto está ilustrado na Figura 2.10.

Podemos designar a largura do pico de ressonância de uma outra maneira utilizando-se o parâmetro Q, chamado de fator de qualidade, de um sistema ressonante. Q é definido como

$$Q = \frac{\omega_r}{2\gamma} \tag{2.64}$$

ou, para amortecimento fraco

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \tag{2.65}$$

Então a largura a meia altura da curva energia $\times$ frequência é aproximadamente

$$\Delta\omega = 2\gamma \approx \frac{\omega_0}{Q}$$

ou, como $\omega = 2\pi f$

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta f}{f_0} \approx \frac{1}{Q}$$

dando a largura relativa do pico de ressonância.

Osciladores de cristal de quartzo são usados para controlar a frequência de estações radiodifusoras. O Q do cristal de quartzo em tal aplicação é da ordem de 10^4. Valores tão grandes quanto este garantem que a frequência de oscilação permaneça precisamente na frequência de ressonância.

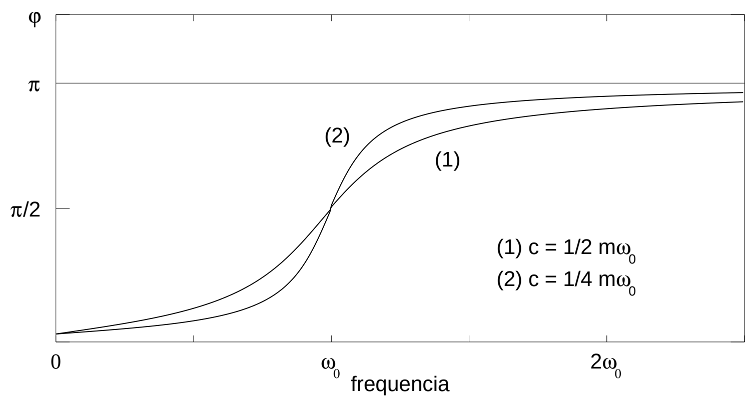


Figura 2.11: Gráfico do ângulo de fase em função da frequência da força externa.

A diferença de fase ϕ entre a força aplicada e a resposta do sistema é dada pela Equação (2.57). Esta equação está representada na Figura 2.11 que mostra ϕ em função de ω. Vemos que a diferença de fase é pequena para ω pequeno, ou seja, a resposta do sistema está em fase com a força aplicada a ele. Na frequência de ressonância ϕ aumenta para $\pi/2$, isto é, a resposta está defasada de 90° em relação à força aplicada. Finalmente, para valores muito grandes de ω, o valor de ϕ se aproxima de π, portanto o movimento do sistema está com 180° de defasagem em relação à força externa.

Análogos Elétrico-Mecânico

Existe uma analogia precisa entre o movimento de um sistema mecânico de massas e molas com forças de atrito do tipo estudado previamente e um circuito constituido de elementos indutivo, capacitivo e resistivo, no qual flui uma corrente elétrica. Assim, se a corrente $i = dq/dt$ (q sendo a carga) flui através de um indutor L, a diferença de potencial nos extremos do indutor é $L\ddot{q}$ e a energia armazenada é $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$. Portanto indutância e carga são os análogos à massa e deslocamento, respectivamente, e diferença de potencial é o análogo à força. Similarmente, se um capacitor de capacitância C tiver carga q, a diferença de potencial será $\frac{q}{C}$ e a energia armazenada é $\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$. Consequentemente, vemos que o recíproco de C é o análogo à constante elástica, k, da mola. Finalmente se uma corrente elétrica i flui através de um resistor de resistência R, a diferença de potencial entre seus extremos é $iR = \dot{q}R$, e a razão temporal da energia dissipada é $i^2R = \dot{q}^2R$ em analogia com $c\dot{v}^2$ para o sistema mecânico, Equação (2.51). A Tabela 2.1 resume a situação

Tabela 2.1:

MECÂNICO		ELÉTRICO	
x	deslocamento	q	carga
$\dot{x}$	velocidade	$\dot{q} = i$	corrente
m	massa	L	indutância
k	constante elástica	C^{-1}	recíproco da capacitância
c	constante de amortecimento	R	resistência
F	força	V	diferença de potencial

Exemplos

1. Determine a frequência de ressonância e o fator de qualidade para o oscilador amortecido do Exemplo 1 da página 62.
Temos

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \\ &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\frac{\omega_0^2}{16}} \\ &= \omega_0\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{7}{8}} \end{aligned} \tag{2.66}$$

para a frequência angular de ressonância. O fator de qualidade é dado por

$$Q = \frac{\omega_r}{2\gamma} = \frac{\omega_0\sqrt{7/8}}{2(\omega_0/4)} = 2\sqrt{\frac{7}{8}} = 1,87$$

2. Se a frequência da força aplicada no oscilador acima é $\omega_0/2$, encontre o ângulo de fase

ϕ. Da Equação (2.57), temos

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2(\omega_0/4)(\omega_0/2)}{\omega_0^2 - (\omega_0/2)^2} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Portanto

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = 18\overset{\circ}{.}4$$

2.16 Movimento sob a ação de uma Força Periódica não Senoidal

A fim de determinarmos o movimento de um oscilador harmônico sujeito à uma força externa periódica mas não senoidal é necessário utilizar um método mais complicado que o utilizado na seção precedente. Neste caso mais geral é conveniente usar o princípio da superposição. Este princípio estabelece que se a força aplicada $F(t)$ que atua no oscilador puder ser expandida numa soma

$$F(t) = \sum_n F_n(t)$$

tal que as equações diferenciais

$$m\ddot{x}_n + c\dot{x}_n + kx_n = F_n(t)$$

sejam individualmente satisfeitas pelas funções

$$x_n = x_n(t)$$

então a equação diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) = \sum_n F_n(t)$$

será satisfeita pela função

$$x = \sum_n x_n(t)$$

Da linearidade das equações diferenciais do movimento segue imediatamente que o teorema acima é valido.

Em particular, quando a força externa $F(t)$ for periódica de frequência angular ω, poderemos desenvolvê-la em série de Fourier. (Consulte um livro texto sobre o método de Fourier). De acordo com a teoria de série de Fourier, podemos expressar $F(t)$ numa soma de termos em senos e cossenos, ou alternativamentepodemos escreve-la em termos de uma soma de exponenciais complexas, isto é,

$$F(t) = \sum_n F_n e^{in\omega t} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Os coeficientes são dados por

$$F_n = \frac{\omega}{2\pi}\int_{t=-\frac{\pi}{\omega}}^{t=\frac{\pi}{\omega}} F(t)e^{-in\omega t}dt$$

Como na seção precedente, o movimento real será dado pela soma de duas partes, a saber, um termo transiente, que desprezaremos, e a solução estacionária.

$$x(t) = A_0 + A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{2i\omega t} + \ldots +$$

O primeiro termo A_0 é uma constante cujo valor depende da forma de F(t). A_0 é nulo para força simétrica. O segundo termo é a resposta de um oscilador forçado na frequência fundamental ω. O terceiro é a resposta no segundo harmônico da força aplicada e assim por diante.

Podemos usar a teoria da seção precedente para obtermos as amplitudes A_n em termos dos coeficientes F_n. Então, da Equação (2.58) temos

$$A_n = \frac{F_n/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\gamma^2 n^2 \omega^2}} \tag{2.67}$$

Da análise acima, vemos que o movimento estacionário final é periódico e que ao harmônico $n\omega$ que for mais próximo da frequência de ressonância ω_r corresponderá a maior de todas as amplitudes. Em particular, se a constante de amortecimento γ for muito pequena e se algum dos harmônicos da força coincidir com a frequência de ressonância de tal maneira que, para algum valor de n, tenhamos

$$\omega_r = n\omega$$

então a amplitude A_n correspondente a este harmônico será dominante. Consequentemente o movimento resultante de um oscilador será aproximadamente senoidal mesmo que a força externa aplicada não o seja.

Exercícios de Treinamento

2.1 Uma partícula de massa m está inicialmente em repouso. Subitamente, no instante $t = 0$, aplica-se uma força constante F_0. Depois de um intervalo de tempo t_0 a força subitamente dobra de valor e permanece constante daí para a frente. Encontre a velocidade da partícula e o deslocamento total no instante $t = 2t_0$.

2.2 Encontre a velocidade v e a posição x em função de t de uma partícula de massa m que parte do repouso em $t = 0$ sujeita às seguintes forças:

a) $F = F_0$
b) $F = F_0 + bt$
c) $F = F_0 \cos\omega t$
d) $F = kt^2$

2.3 Encontre a velocidade v em função do deslocamento x de uma partícula de massa m que parte do repouso em $x = 0$ sujeita às seguintes forças:

a) $F = F_0 + kx$
b) $F = F_0 e^{-kx}$
c) $F = F_0 + kv$

2.4 A força que atua numa partícula varia com a posição de acordo com a lei de potência

$$F(x) = -kx^n$$

a) Encontre a função energia potencial.
b) Se $v = v_0$ em $t = 0$ e $x = 0$, encontre v em função de x.
c) Determine os pontos de retorno do movimento.

Problemas

2.5 Uma partícula de massa m está inicialmente em repouso. Uma força constante F_0 atua na partícula até o instante $t = t_0$. A força então aumenta de valor linearmente com o tempo tal que depois de um intervalo adicional t_0 a força vale $2F_0$. Mostre que a distância total percorrida pela partícula no intervalo total de tempo $2t_0$ é

$$\frac{13}{6}\frac{F_0 t_0^2}{m}.$$

2.6 Um bloco é lançado para cima em um plano inclinado com velocidade inicial v_0. Se a inclinação do plano é θ, e o coeficiente de atrito cinético entre o plano e o bloco é μ, encontre o tempo total necessário para o bloco retornar ao ponto de lançamento.

2.7 Um bloco desliza numa superfície horizontal lubrificada com óleo pesado tal que o bloco sofre uma resistência viscosa que varia com a velocidade de acordo com a equação

$$F(v) = -cv^n$$

Se a velocidade inicial é v_0 em $t = 0$, encontre v e o deslocamento x em função do tempo t. Encontre também v em função de x. Em particular, mostre que para $n = 1/2$, o bloco não percorrerá mais do que

$$\frac{2mv_0^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{3c}$$

2.8 Uma partícula de massa m é abandonada em repouso a uma distância b de um centro fixo de força que atrai a partícula de acordo com a lei do inverso do quadrado

$$F(x) = -kx^{-2}$$

Mostre que o tempo necessário para a partícula chegar à origem é:

$$\pi\sqrt{\frac{mb^3}{8k}}$$

2.9 Encontre a relação entre a distância de queda e a velocidade de um corpo abandonado do repouso em queda livre e sujeito a resistência do ar proporcional: (a) à velocidade (b) ao quadrado da velocidade.

2.10 Um projétil é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial v_0. Supondo que a resistência do ar seja proporcional ao quadrado da velocidade, mostre que a velocidade do projétil ao retornar ao ponto de lançamento é

$$\frac{v_0 v_t}{\sqrt{v_0^2 + v_t^2}}$$

no qual

$$v_t = \text{velocidade terminal} = \sqrt{\frac{mg}{c}}$$

2.11 A velocidade de uma partícula de massa m varia com o deslocamento x de acordo com a equação

$$v = \frac{b}{x}$$

Encontre a força que atua na partícula em função de x.

2.12 Sabendo-se que a força que atua em uma partícula é o produto de uma função da posição e uma função da velocidade $F(x, v) = f(x)g(v)$, mostre que a equação diferencial do movimento pode ser resolvida por integração. A equação de movimento pode ser resolvida por simples integração se a força for o produto de uma função da posição por uma função do tempo? E se for o produto de uma função do tempo por uma função da velocidade?

2.13 A força que atua em uma partícula de massa m é dada por

$$F = kvx$$

em que k é uma constante. A partícula passa pela origem com velocidade v_0 em $t = 0$. Encontre x em função de t.

2.14 Uma partícula executando movimento harmônico simples de amplitude A passa pela posição de equilíbrio com velocidade v_0. Qual é o período de oscilação?

2.15 Duas partículas de massas m_1 e m_2 executam movimento harmônico simples de amplitude A_1 e A_2, respectivamente. Qual é a razão entre seus períodos: T_1/T_2, se a energia total da partícula 1 for duas vezes a da partícula 2?

2.16 Uma partícula executando movimento harmônico simples tem velocidade v_1 quando o deslocamento é x_1 e a velocidade v_2 quando o deslocamento for x_2. Encontre o período e a amplitude do movimento.

2.17 Um único objeto de massa m está dependurado em duas molas de constantes k_1 e k_2 mantidas em posição vertical. Mostre que a frequência angular de oscilação é

$$\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

se as molas forem ligadas em paralelo e

$$\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$$

se as molas forem ligadas em série.

2.18 Uma caixa de massa M contendo um bloco de massa m está dependurada em uma mola de constante elástica k. Encontre a força de reação entre o bloco e o fundo da caixa em função do tempo sabendo-se que o sistema foi deslocado para baixo de uma distância d, contada a partir da posição de equilíbrio, e em seguida abandonado. Para que valor de d o bloco perderá o contato com o fundo da caixa na parte mais alta das oscilações verticais? Despreze a resistência do ar.

2.19 Mostre que a razão entre duas elongações máximas sucessivas de um oscilador harmônico amortecido é constante. (Nota: Os máximos não ocorrem nos pontos de contato da curva de elongação em função do tempo com a curva $Ae^{-\gamma t}$).

2.20 Sabendo-se que a amplitude de um oscilador harmônico amortecido diminui para $1/e$ do seu valor inicial depois de n ciclos completos, mostre que a razão entre o período de oscilação e o período do mesmo oscilador sem amortecimento é dado por

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi^2 n^2}} \approx 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$$

2.21 A velocidade terminal de uma bola em queda livre é v_t. Quando a bola está dependurada em uma mola leve a mola se distende de x_0. Mostre que a frequência natural de oscilação é dada por

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{x_0} - \frac{g^2}{4v_t^2}}$$

supondo que a resistência do ar seja proporcional à velocidade.

2.22 Mostre que a energia do sistema acima cai a $1/e$ do seu valor inicial em $t = v_t/g$.

2.23 Mostre que a frequência da força externa, para a qual a amplitude do oscilador harmônico forçado é a metade da amplitude de ressonância, é aproximadamente

$$\omega_0 \pm \gamma\sqrt{3}.$$

Considere o caso de amortecimento fraco.

2.24 Encontre a frequência para a qual a velocidade do oscilador harmônico forçado é máxima. (Sugestão: Maximize a quantidade $v_{max} = \omega A(\omega)$).

2.25 Mostre que o fator de qualidade Q de um oscilador harmônico forçado é igual ao fator pelo qual deve ser multiplicado a resposta à frequência para se obter a resposta à frequência de ressonância.

2.26 Resolva a equação diferencial do movimento do oscilador harmônico sujeito a uma força amortecida da forma

$$F_{ext} = F_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega t).$$

2.27 Mostre que a série de Fourier para uma onda quadrada periódica é

$$f(t) = \frac{4}{\pi}(\text{sen}(\omega t) + \frac{1}{3}\text{sen}(3\omega t) + \frac{1}{5}\text{sen}(5\omega t) + \ldots)$$

onde

$$\begin{aligned} f(t) &= +1 \quad \text{para} \quad 0 < \omega t < \pi, 2\pi < \omega t < 3\pi, \text{ etc} \\ f(t) &= -1 \quad \text{para} \quad \pi < \omega t < 2\pi, 3\pi < \omega t < 4\pi, \text{ etc} \end{aligned} \tag{2.68}$$

2.28 Use o resultado acima para obter o movimento estacionário de um oscilador harmônico forçado por uma onda quadrada periódica de amplitude F_0. Em particular encontre as amplitudes relativas dos primeiros três termos A_1, A_3 e A_5 da função resposta $x(t)$ no caso em que o terceiro harmônico, 3ω, coincide com a frequência de ressonância do oscilador. Considere o fator de qualidade $Q = 100$.

Respostas de problemas selecionados de números ímpares

2.1 $v = \frac{3F_0 t_0}{m}; x(2t_0) = \frac{5}{2}\frac{F_0 t_0^2}{m}$

2.3 a) $v = \sqrt{(2F_0 x + kx^2)m^{-1}}$
c) $x = \frac{m}{k^2}\left[kv - F_0 \ln\left(\frac{F_0 + kv}{F_0}\right)\right]$

2.7 $v = (A + Bt)^\alpha$ onde $A = v_0^{1-n}$, $B = \frac{c}{m}(n-1)$, $\alpha = (1-n)^{-1}$
$x = C(v_0^\beta - v^\beta)$ onde $C = \frac{m}{c}(2-n)^{-1}$ e $n \neq 1, 2$ e $\beta = 2 - n$

2.9 a) $x = -\frac{m}{c}|v + \frac{mg}{c}\ln(1 + \frac{cv}{mg})|$
b) $x = -\frac{m}{2c}\ln(1 - \frac{cv^2}{mg})$

2.11 $F(x) = -mb^2 x^{-3}$

2.13 $x = a\,\text{tg}\,(bt)$ onde $a = \sqrt{2mv_0/k}$, $b = \sqrt{kv_0/2m}$

2.15 $\frac{A_1}{A_2}\sqrt{\frac{m_1}{2m_2}}$

Capítulo 3

Movimento Geral de uma Partícula em Três Dimensões

Passemos agora ao caso geral do movimento de uma partícula no espaço.

3.1 Momentum Linear

Vimos que a forma vetorial da equação de movimento de uma partícula é

$$\vec{\mathrm{F}} = \frac{d\vec{\mathrm{p}}}{dt}$$

ou, de modo equivalente,

$$\vec{\mathrm{F}} = \frac{d}{dt}(m\vec{\mathrm{v}}) \tag{3.1}$$

Essa é a forma abreviada para três equações nas quais as componentes de força podem depender das coordenadas, de suas derivadas em relação ao tempo e do tempo. Infelizmente não existe um método geral para encontrarmos soluções analíticas dessas equações em todos os casos possíveis. Existem entretanto muitos tipos de funções força, fisicamente importantes, para as quais as equações diferenciais do movimento podem ser resolvidas por métodos simples. Algumas dessas funções serão estudadas nas seções que se seguem.

Nos casos em que $\vec{\mathrm{F}}$ é uma função explícita do tempo, o momentum $\vec{\mathrm{p}}$ pode ser encontrado determinando-se o impulso, isto é, por integração relativamente ao tempo, como no caso unidimensional:

$$\int \vec{\mathrm{F}}dt = \vec{\mathrm{p}}(t) + C = m\vec{\mathrm{v}}(t) + C \tag{3.2}$$

Analogamente, uma segunda integração dará a posição:

$$\int \vec{\mathrm{v}}dt = \vec{\mathrm{r}}(t) + C' \tag{3.3}$$

Embora o método seja perfeitamente válido, conhecermos de antemão a força como função do tempo não é uma situação típica na dinâmica. É claro que no caso especial da força ser nula, o momentum e a velocidade são constantes e as equações anteriores são válidas. Mais tarde teremos a oportunidade de discutir, em uma forma mais geral, o conceito de momentum

constante sob ação de uma força nula, quando estudarmos sistemas de partículas no Capítulo 4.

3.2 Momentum Angular

Consideremos a equação geral do movimento de uma partícula $\vec{\mathrm{F}} = d\vec{\mathrm{p}}/dt$. Multipliquemos ambos os membros pelo operador $\vec{\mathrm{r}}\times$. Obteremos

$$\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}} = \vec{\mathrm{r}} \times \frac{d\vec{\mathrm{p}}}{dt}$$

O membro da esquerda da equação acima é, por definição, o momento da força $\vec{\mathrm{F}}$ em relação à origem do sistema de coordenadas. O membro da direita é igual à derivada em relação ao tempo da quantidade $\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{p}}$. Para provar isso, diferenciemos

$$\frac{d}{dt}(\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{p}}) = \vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{p}} + \vec{\mathrm{r}} \times \frac{d\vec{\mathrm{p}}}{dt}$$

Mas $\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{p}} = \vec{\mathrm{v}} \times m\vec{\mathrm{v}} = m\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{v}} = 0$. Logo, podemos escrever:

$$\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}} = \frac{d}{dt}(\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{p}}) \tag{3.4}$$

A quantidade $\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{p}}$ é denominada momentum angular da partícula em relação à origem. Nosso resultado, em palavras, é o de que a taxa de variação do momentum angular de uma partícula é igual ao momento da força que atua na partícula.

O conceito importante de momentum angular será particularmente útil no estudo de sistemas de partículas e corpos rígidos, Capítulos 4 e 5.

3.3 O Princípio do Trabalho

Na equação geral do movimento vamos tomar o produto escalar pela velocidade $\vec{\mathrm{v}}$ em ambos os lados

$$\vec{\mathrm{F}} \ . \ \vec{\mathrm{v}} = \frac{d\vec{\mathrm{p}}}{dt} \ . \ \vec{\mathrm{v}} = \frac{d(m\vec{\mathrm{v}})}{dt} \ . \ \vec{\mathrm{v}}$$

Usando a regra de diferenciação de um produto escalar, encontramos

$$\frac{d(\vec{\mathrm{v}} \ . \ \vec{\mathrm{v}})}{dt} = 2\vec{\mathrm{v}} \ . \ \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}.$$

Considerando a massa constante, vemos que a equação acima é equivalente a

$$\vec{\mathrm{F}} \ . \ \vec{\mathrm{v}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{\mathrm{v}} \ . \ \vec{\mathrm{v}}\right) = \frac{dT}{dt} \tag{3.5}$$

na qual introduzimos a energia cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$. Além disso, desde que $\vec{\mathrm{v}}dt = d\vec{\mathrm{r}}$, podemos integrar para obter

$$\int \vec{\mathrm{F}} \ . \ d\vec{\mathrm{r}} = \int dT \tag{3.6}$$

O lado esquerdo da equação acima é uma integral de linha. Ela representa o trabalho realizado na partícula pela força $\vec{F}$ enquanto a partícula se movimenta em sua trajetória. O lado direito é a variação da energia cinética da partícula. Portanto a Equação (3.6) estabelece que o trabalho realizado sobre a partícula pela resultante da força é igual à variação da energia cinética.

3.4 Forças Conservativas e Campos de Forças

Geralmente, o valor de uma integral de linha, o trabalho neste caso, depende da trajetória de integração (veja Figura 3.1). Em outras palavras, o trabalho feito usualmente depende da rota específica que a partícula toma para ir de um ponto a outro. Isto significa que se tivermos de calcular o valor da integral de linha precisaremos conhecer de antemão a trajetória do movimento da partícula. Todavia, os tipos usuais de problemas que são de interesse em dinâmica da partícula são aqueles nos quais a trajetória do movimento não é conhecida a priori, ao contrário, a trajetória é uma da incógnitas a ser calculada. O princípio do trabalho expresso pela Equação (3.6) pode parecer, então, não ser muito útil aos nossos propósitos. Entretanto, na verdade este princípio é muito útil no estudo do movimento de uma partícula sob a ação de um tipo particular de força conhecida como *força conservativa.* Por sorte, muitas das forças fisicamente importantes são desse tipo.

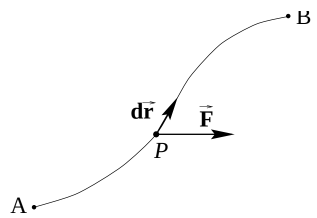


Figura 3.1: O trabalho feito por uma força $\vec{F}$ é a integral de linha $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Quando a força $\vec{F}$ for uma função das coordenadas de posição apenas, dizemos que ela define um *campo de forças* estático. Dentre os tipos possíveis de campos, existe uma classe importante para a qual a integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é independente da trajetória de integração. Tais campos de força são conservativos. Matematicamente, um campo conservativo é aquele para o qual a expressão $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ é uma diferencial exata. Quando uma partícula move-se num campo conservativo, a integral de linha, e dessa maneira a variação da energia cinética, pode ser conhecida de antemão. Este conhecimento pode ser usado para predizer o movimento da partícula.

3.5 A Função Energia Potencial para o Movimento Tridimensional

Se uma partícula move-se sob a ação de uma força conservativa $\vec{F}$, a afirmação de que o acréscimo do trabalho $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ é uma diferencial exata significa que ela pode ser expressa

como a diferencial de uma função escalar da posição $\vec{r}$, ou seja

$$\vec{F} \,.\, d\vec{r} = -dV(\vec{r}) \tag{3.7}$$

Esta equação é análoga àquela para o caso unidimensional $F(x)dx = -dV$, Seção 2.7. A função V é a energia potencial. O princípio do trabalho, Equação (3.6), é representada então de um modo simples por $dT = -dV$ ou

$$d(T + V) = 0 \tag{3.8}$$

Esta relação implica que a quantidade $T + V$ permanece constante durante o movimento da partícula. Chamamos esta constante de energia total E e escrevemos

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r}) = E \tag{3.9}$$

No caso de força não conservativa o incremento do trabalho não é uma diferencial exata e dessa maneira não pode ser igual a uma quantidade $-dV$. Um exemplo comum de força não conservativa é o atrito. Quando forças não conservativas estão presentes podemos expressar a força total como a soma $\vec{F} + \vec{F}'$ onde $\vec{F}$ representa forças conservativas e $\vec{F}'$ não conservativas. O princípio do trabalho é dado então por $dT = \vec{F} \,.\, d\vec{r} + \vec{F}' \,.\, d\vec{r} = -dV + \vec{F}' \,.\, d\vec{r}$ ou $d(T+V) = \vec{F}' \,.\, d\vec{r}$. Vemos que a quantidade $T + V$ não é constante, mas aumenta ou diminui quando a partícula se move dependendo do sinal de $\vec{F}' \,.\, d\vec{r}$. No caso de forças dissipativas a direção de $\vec{F}'$ é oposta daquela de $d\vec{r}$, desse modo $\vec{F}' \,.\, d\vec{r}$ é negativo e a energia total $T + V$ diminui à proporção que a partícula se move.

3.6 Gradiente e o Operador Del em Mecânica

Em coordenadas retangulares, a equação

$$\vec{F} \,.\, d\vec{r} = -dV$$

é dada por

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

o que nos leva às seguintes igualdades

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{3.10}$$

Em palavras, se o campo de força for conservativo, então as componentes da força serão obtidas através das derivadas parciais da função energia potencial com o sinal trocado.

Podemos escrever agora a força vetorialmente como:

$$\vec{F} = -\vec{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} - \vec{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} - \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z} \tag{3.11}$$

Esta equação pode ser escrita numa forma abreviada mais conveniente

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \tag{3.12}$$

Introduzimos aqui o operador vetorial

$$\vec{\nabla} = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.13}$$

$\vec{\nabla}$ é chamado de operador **del**. A expressão $\vec{\nabla} V$ é também chamada de *O gradiente de V* e algumas vezes é escrita *grad* V. Matematicamente, o gradiente de uma função é um vetor que representa sua derivada espacial. Fisicamente, o negativo do gradiente da função energia potencial nos dá a direção, o sentido e o módulo da força que atua numa partícula localizada num campo criado por outras partículas. O sinal negativo significa que a partícula é obrigada a mover-se na direção em que a energia potencial decresce. A Figura 3.2 é uma ilustração do gradiente. Nessa figura a função potencial é representada na forma de curvas de nível representando energia potencial constante. A força em qualquer ponto é sempre normal à superfície equipotencial que passa pelo ponto em questão.

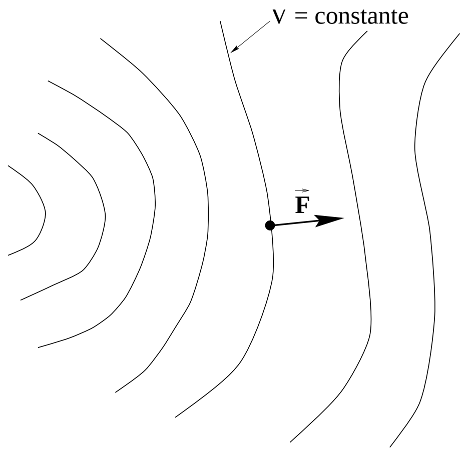


Figura 3.2: Um campo de força representado por linhas de contorno de energia potencial.

3.7 Condições para a Existência de uma Função Potencial

No Capítulo 2 vimos que em se tratando de movimento unidimensional, a força será conservativa sempre que ela for função apenas da posição. Estamos interessados agora em verificar se existe uma afirmação equivalente para o caso geral de movimentos bi e tridimensionais. Isto é, se a força que atua em uma partícula for uma função apenas das coordenadas de posição, existirá sempre uma função V que satisfaça a Equação (3.10) acima? A resposta para esta pergunta é não; somente existirá a função potencial se as componentes da força satisfizerem certos critérios.

Vamos supor que exista a função potencial, isto é, que as equações (3.10) sejam válidas. Temos então

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

Como a ordem de diferenciação pode ser invertida, as duas expressões são iguais e,

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \tag{3.14}$$

Estas são condições *necessárias* para que a função potencial exista; elas expressam a condição de que

$$\vec{\mathrm{F}} \;.\; d\vec{\mathrm{r}} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

seja uma diferencial exata. É possível mostrar também que elas são condições suficientes, isto é, se as Equações (3.14) forem válidas em todos os pontos, então as componentes da força serão realmente deriváveis de uma função potencial $V(x, y, z)$, e a soma da energia cinética com a energia potencial será constante[1].

Os critérios para que um campo de força seja conservativo serão convenientemente apresentados em termos do operador del. Nesta aplicação introduzimos o produto vetorial do operador del:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{F}} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \vec{\mathrm{k}}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{3.15}$$

O produto vetorial definido acima é chamado de *rotacional de* $\vec{\mathrm{F}}$. De acordo com as Equações (3.14), vemos que as componentes do rotacional se anulam se a força $\vec{\mathrm{F}}$ for conservativa. Então a condição para uma força ser conservativa pode ser dada numa forma compacta

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{F}} = \vec{0} \tag{3.16}$$

Matematicamente, esta condição exige que a expressão $\vec{\mathrm{F}} \;.\; d\vec{\mathrm{r}}$ seja uma diferencial exata, ou em outras palavras, que a integral $\int \vec{\mathrm{F}} \;.\; d\vec{\mathrm{r}}$ seja independente do caminho de integração. Fisicamente, a anulação do rotacional da força $\vec{\mathrm{F}}$ significa que o trabalho feito por $\vec{\mathrm{F}}$ sobre a partícula em movimento é independente da trajetória que liga um ponto ao outro.

Há uma terceira expressão envolvendo o operador del, ou seja o produto escalar $\vec{\nabla} \;.\; \vec{\mathrm{F}}$. Esse é chamado a *divergência de* $\vec{\mathrm{F}}$. No caso de campo de força, a divergência dá uma medida da densidade de fontes de campo em um certo ponto. A divergência é de particular importância na teoria de eletricidade e magnetismo.

Expressões para o gradiente, rotacional e divergência em coordenadas cilíndricas e esféricas são apresentadas abaixo:

Coordenadas Cilíndricas

[1]Veja qualquer livro texto de cálculo avançado, por exemplo, A. E. Taylor, Advanced Calculus, Ginn, Boston, 1955. Uma discussão interessante dos critérios de conservação quando este campo contém singularidades foi feita por Feng na Amer. J. Phys. 37, 616 (1969).

Gradiente

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

Rotacional

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\vec{e}_R + \left(\frac{\partial F_R}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial R}\right)\vec{e}_\phi + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial (RF_\phi)}{\partial R} - \frac{1}{R}\frac{\partial F_R}{\partial \phi}\right)\vec{k}$$

Divergência

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{F} = \frac{1}{R}\frac{\partial (RF_R)}{\partial R} + \frac{1}{R}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Coordenadas Esféricas

Gradiente

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

Rotacional

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} \;&=\; \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\left(\frac{\partial (F_\phi\,\mathrm{sen}\,\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \\ &+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\phi\end{aligned}$$

Divergência

$$\vec{\nabla} \,.\, \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial (\mathrm{sen}\,\theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

Exemplos

1. Encontre o campo de força da função potencial $V = x^2 + xy + xz$. Aplicando o operador del.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -\vec{\imath}(2x + y + z) - \vec{\jmath}x - \vec{k}\,x$$

2. O campo de força $\vec{F} = \vec{\imath}xy + \vec{\jmath}xz + \vec{k}\,yz$ é conservativo? O rotacional de $\vec{F}$ é

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & xz & yz \end{vmatrix} = \vec{\imath}(z - x) + \vec{\jmath}0 + \vec{k}\,(z - x)$$

A expressão final não é nula, logo o campo não é conservativo.

3. Para que valores das constantes a, b e c a força $\vec{F} = \vec{\imath}(ax + by^2) + \vec{\jmath}cxy$ é conservativa? Tomando o rotacional de $\vec{F}$ temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ax + by^2 & cxy & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}\,(c - 2b)y$$

O que mostra que a força será conservativa se $c = 2b$. O resultado é independente do valor de a.

4. Mostre que a lei de força inverso do quadrado em três dimensões $\vec{\mathrm{F}} = -\frac{K}{r^2}\vec{\mathrm{e}}_r$ é conservativa calculando o rotacional. Use coordenadas esféricas.

O rotacional é dado na página anterior.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{F}} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta} \begin{vmatrix} \vec{\mathrm{e}}_r & \vec{\mathrm{e}}_\theta r & \vec{\mathrm{e}}_\phi r \operatorname{sen}\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & rF_\theta & rF_\phi \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix}$$

Temos $F_r = -\frac{K}{r^2}$, $F_\theta = 0$, $F_\phi = 0$. O rotacional se reduz então a

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{F}} = \frac{\vec{\mathrm{e}}_\theta}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \phi}\left(-\frac{K}{r^2}\right) - \frac{\vec{\mathrm{e}}_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{K}{r^2}\right) = 0$$

que, evidentemente, se anula porque ambas as derivadas parciais são nulas. Então a força em questão é conservativa.

3.8 Forças do Tipo Separável

Muitas vezes, escolhendo adequadamente o sistema de coordenadas as componentes de um campo de força dependem apenas das coordenadas respectivas, isto é

$$\vec{\mathrm{F}} = \vec{\mathrm{i}} F_x(x) + \vec{\mathrm{j}} F_y(y) + \vec{\mathrm{k}} F_z(z) \tag{3.17}$$

Forças deste tipo são chamadas de *separáveis*. Verificamos que o rotacional de tais forças é nulo e então, o campo é conservativo independentemente das formas particulares das componentes de força desde que cada uma seja função apenas da coordenada envolvida. A integração das equações diferenciais do movimento é então muito simples, porque cada equação componente é do tipo $m\ddot{x} = F(x)$. Nesse caso as equações podem ser resolvidas pelos métodos descritos no capítulo anterior de movimento retilíneo.

Se as componentes da força envolverem o tempo e a derivada das coordenadas com relação ao tempo, então a força não é mais necessariamente conservativa. Apesar disso, se a força for separável, então as componentes da equação do movimento serão da forma $m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ e podem ser resolvidas pelos métodos usados no capítulo anterior. Alguns exemplos de forças separáveis, conservativas e não conservativas, serão discutidos nas seções seguintes.

3.9 Movimento de um Projétil em um Campo Gravitacional Uniforme

Um dos mais famosos problemas clássicos de dinâmica é o de movimento de um projétil. Estudaremos este problema com alguns detalhes porque ele ilustra a maior parte dos princípios estudados nas seções anteriores.

Sem Resistência do Ar

Primeiramente, por simplicidade, consideremos o caso de um projétil movendo-se sem resistência do ar. Nessa situação idealizada apenas a força da gravidade atua no projétil.

Se fizermos o eixo z coincidir com a vertical, a equação diferencial do movimento ficará

$$m\frac{d^2\vec{\mathrm{r}}}{dt^2} = -mg\vec{\mathrm{k}}$$

Se idealizarmos mais ainda o problema e considerarmos que a aceleração da gravidade g é constante, então a função força é visivelmente do tipo separável e é também conservativa desde que é um caso especial daquele expresso pela Equação (3.17). Particularizaremos o problema considerando que no instante $t = 0$ o projétil estava na origem com velocidade v_0. A equação da energia (3.9) fica

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = \frac{1}{2}mv_0^2$$

ou,

$$v^2 = v_0^2 - 2gz \tag{3.18}$$

dando a velocidade como uma função da altura. Esta é toda a informação que podemos obter da equação de energia.

Para conseguir mais informações, devemos voltar à equação diferencial do movimento. Podemos escrevê-la

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{\mathrm{r}}}{dt}\right) = -g\vec{\mathrm{k}}$$

que é da forma discutida na Seção (1.20). Pode ser integrada diretamente. Uma primeira integração nos dá a velocidade.

$$\frac{d\vec{\mathrm{r}}}{dt} = -gt\vec{\mathrm{k}} + \vec{\mathrm{v}}_0$$

onde a constante de integração $\vec{\mathrm{v}}_0$ é a velocidade inicial. Outra integração nos leva ao vetor posição

$$\vec{\mathrm{r}} = -\frac{1}{2}gt^2\vec{\mathrm{k}} + \vec{\mathrm{v}}_0 t \tag{3.19}$$

A constante de integração $\vec{\mathrm{r}}_0$, neste caso, é zero porque a posição inicial do projétil era a origem. As componentes da equação acima são

$$\begin{aligned} x &= \dot{x}_0 t \\ y &= \dot{y}_0 t \\ z &= \dot{z}_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Aqui $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ e $\dot{z}_0$ são as componentes da velocidade inicial $\vec{\mathrm{v}}_0$. Resolvemos então o problema de determinar a posição do projétil como função do tempo.

Para conhecermos a trajetória do projétil, eliminamos o tempo t das equações x e y e obtemos

$$y = bx$$

onde a constante b é

$$b = \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}$$

Isto significa que a trajetória está contida em um plano. Em particular, se $\dot{y}_0 = 0$, então a trajetória está contida no plano xz. Eliminando o tempo nas equações x e z, encontramos que a equação da trajetória é da forma

$$z = \alpha x - \beta x^2$$

onde $\alpha = \dot{z}_0/\dot{x}_0$ e $\beta = g/2\dot{x}_0^2$. A trajetória é, deste modo, uma parábola contida no plano $y = bx$. A Figura 3.3 mostra isto.

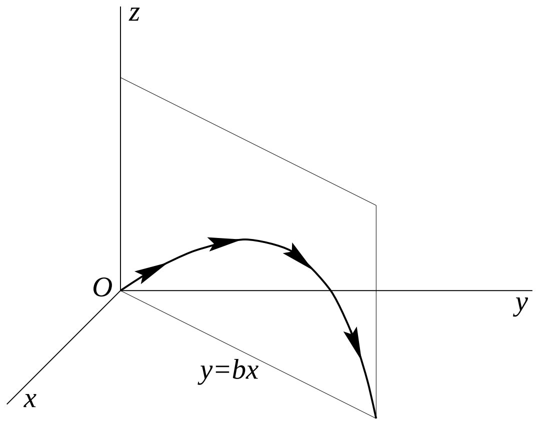


Figura 3.3: Trajetória de um projétil movendo-se em três dimensões.

Resistência do Ar Linear

Vamos considerar o movimento de um projétil para a situação mais realista onde há uma força retardadora devido a resistência do ar. Neste caso o movimento é não conservativo. A energia total diminui continuamente como resultado da perda por fricção.

Por simplicidade, vamos supor que a lei de resistência do ar seja linear de tal maneira que a força resistiva varia diretamente com a velocidade $\vec{\mathrm{v}}$. Será conveniente escrever a constante de proporcionalidade como $m\gamma$ onde m é a massa do projétil. Temos então duas forças atuando no projétil; a resistência do ar $m\gamma\vec{\mathrm{v}}$, e a força da gravidade $-mg\vec{\mathrm{k}}$, como antes. A equação diferencial do movimento é então

$$m\frac{d^2\vec{\mathrm{r}}}{dt^2} = -m\gamma\vec{\mathrm{v}} - mg\vec{\mathrm{k}}$$

ou, depois de cancelar os m's,

$$\frac{d^2\vec{\mathrm{r}}}{dt^2} = -\gamma\vec{\mathrm{v}} - g\vec{\mathrm{k}}$$

A integração desta equação é feita convenientemente expressando-a na forma de componentes como segue:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\gamma \dot{x} \\ \ddot{y} &= -\gamma \dot{y} \\ \ddot{z} &= -\gamma \dot{z} - g \end{aligned}$$

Vemos que as equações estão separadas. Cada uma então pode ser resolvida separadamente pelos métodos do capítulo anterior. Usando nossos resultados da Seção 2.9, podemos escrever prontamente as soluções

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}_0 e^{-\gamma t} \\ \dot{y} &= \dot{y}_0 e^{-\gamma t} \\ \dot{z} &= \dot{z}_0 e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

para as componentes da velocidade, e

$$\begin{aligned} x &= \frac{\dot{x}_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \\ y &= \frac{\dot{y}_0}{\gamma}\left(1 - e^{-\gamma t}\right) \\ z &= \left(\frac{\dot{z}_0}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}\right)\left(1 - e^{-\gamma t}\right) - \frac{g}{\gamma}t \end{aligned} \tag{3.21}$$

para as coordenadas de posição. Aqui, como antes, as componentes da velocidade inicial são $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$ e $\dot{z}_0$ e consideramos o projétil inicialmente na origem.

Como no caso de resistência do ar nula, o movimento está inteiramente contido no plano $y = bx$ com $b = \dot{y}_0/\dot{x}_0$. Todavia, a trajetória neste plano não é uma parábola, mas uma curva que se situa abaixo da parábola correspondente. Veja a ilustração na Figura 3.4. Inspecionando as equações de x e y vemos que, para t grande, os valores de x e y se aproximam dos valores limites

$$x \to \frac{\dot{x}_0}{\gamma} \qquad\qquad y \to \frac{\dot{y}_0}{\gamma}$$

Isto significa que a trajetória tem uma assíntota vertical.

A solução final do movimento de um projétil com resistência do ar linear, veja Equações (3.21) pode ser escrita vetorialmente assim

$$\vec{\mathrm{r}} = \left(\frac{\vec{\mathrm{v}}_0}{\gamma} + \frac{\vec{\mathrm{k}}\,g}{\gamma^2}\right)\left(1 - e^{-\gamma t}\right) - \vec{\mathrm{k}}\,\frac{gt}{\gamma}$$

Por diferenciação vemos que esta equação é realmente solução da equação diferencial do movimento.

É útil considerar o caso em que a resistência do ar for muito pequena, isto é, quando o valor da quantidade γt nos fatores exponenciais for muito menor do que a unidade. Para isso vamos desenvolver em série o fator exponencial, usando

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots$$

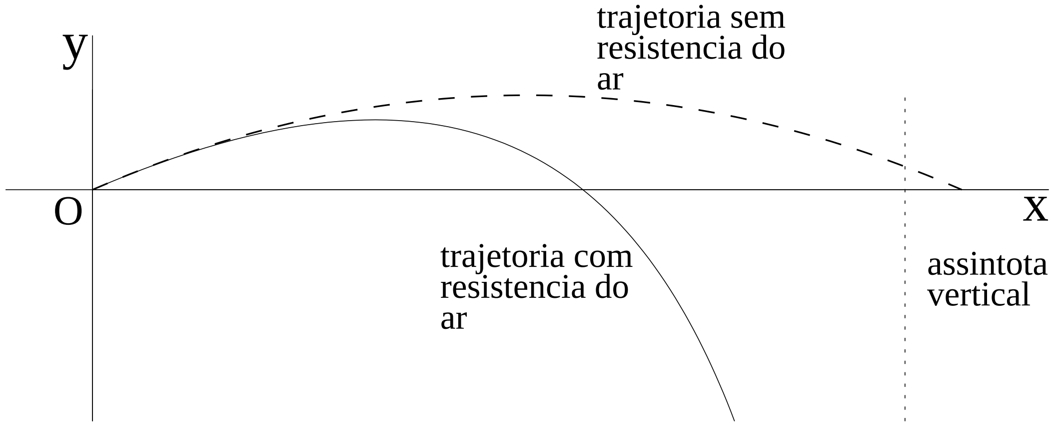


Figura 3.4: Comparação das trajetórias de uma partícula movendo-se com e sem resistência do ar.

onde faremos $u = -\gamma t$. O resultados, depois de cancelar e colecionar os termos, fica na forma

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{k} - \Delta \vec{r}$$

onde

$$\Delta \vec{r} = \gamma \left| \vec{v}_0 \left(\frac{t^2}{2!} - \frac{\gamma t^3}{3!} + \ldots \right) - \vec{k}\, g \left(\frac{t^3}{3!} - \frac{\gamma t^4}{4!} + \ldots \right) \right|$$

A quantidade $\Delta \vec{r}$ pode ser entendida como uma correção na trajetória do projétil sem resistência que leva à trajetória verdadeira.

No movimento real de um projétil na atmosfera, a lei de resistência do ar não é de maneira nenhuma linear, mas uma função muito complicada da velocidade. Um cálculo preciso da trajetória pode ser feito por meio de métodos de integração numérica utilizando-se computadores.

3.10 O Oscilador Harmônico em duas e três dimensões

Consideramos nessa seção o movimento de uma partícula que está sujeita a uma força restauradora linear que está sempre dirigida para um ponto fixo, a origem do nosso sistema de coordenadas. Esta força pode ser representada pela expressão

$$\vec{F} = -k \vec{r}$$

A equação diferencial do movimento é então expressa por

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -k \vec{r} \tag{3.22}$$

A situação pode ser visualizada, de uma maneira aproximada, por uma partícula presa a um conjunto de molas como mostrado na Figura 3.5. Este é o oscilador harmônico tri-dimensional.

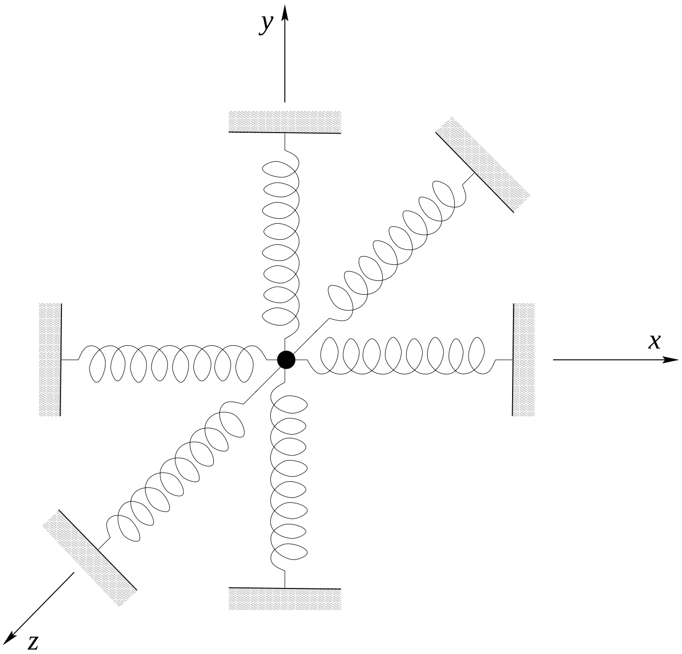


Figura 3.5: Modelo de um oscilador harmônico tridimensional.

O oscilador bi-dimensional

Para o caso de movimento num plano, a equação diferencial é equivalente às duas equações componentes

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$m\ddot{y} = -ky$$

Elas estão separadas, e podemos, imediatamente, escrever as soluções na forma

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad\qquad y = B\cos(\omega t + \beta) \tag{3.23}$$

onde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

As constantes A, B, α e β ficam determinadas a partir das condições iniciais, em qualquer caso.

Encontramos a equação da trajetória eliminando o tempo t nestas duas equações. Para conseguirmos isto, escreveremos a segunda equação na forma

$$y = B\cos(\omega t + \alpha + \Delta)$$

onde $\Delta = \beta - \alpha$. Desenvolvendo, temos

$$y = B[\cos(\omega t + \alpha)\cos\Delta - \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)\operatorname{sen}\Delta]$$

Usando a primeira das Equações (3.23), obtemos

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\Delta - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\operatorname{sen}\Delta \tag{3.24}$$

que é uma equação quadrática em x e y. A equação quadrática geral

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$$

pode representar uma elípse, uma parábola, ou uma hipérbole, dependendo do discriminante

$$b^2 - 4ac$$

ser negativo, zero, ou positivo, respectivamente. No presente caso o discriminante é $-(2\operatorname{sen}\Delta/AB)^2$. A Figura 3.6 mostra que a trajetória é elíptica pois o discriminante da equação é negativo.

No caso particular em que a diferença de fase Δ seja igual a $\pi/2$ a equação da trajetória se reduzirá a

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

que é a equação de uma elípse cujos eixos coincidem com os eixos coordenados. Por outro lado, se a diferença de fase for 0 ou π, então a equação da trajetória se reduzirá a uma linha reta dada por

$$y = \pm\frac{B}{A}x$$

O sinal positivo é válido quando $\Delta = 0$, e o negativo para $\Delta = \pi$. É possível mostrar que no caso geral o eixo da trajetória elíptica formará um ângulo ϕ com o eixo x definido por

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2AB\cos\Delta}{A^2 - B^2} \tag{3.25}$$

Como exercício, deixamos para o leitor a dedução da expressão acima.

O Oscilador Harmônico Tri-dimensional

Para o caso de movimento tridimensional a equação do movimento é equivalente às três equações

$$m\ddot{x} = -kx \qquad m\ddot{y} = -ky \qquad m\ddot{z} = -kz$$

que estão separadas. As soluções são da forma (3.23), isto é

$$\begin{aligned} x &= A_1 \operatorname{sen}\omega t + B_1 \cos\omega t \\ y &= A_2 \operatorname{sen}\omega t + B_2 \cos\omega t \\ z &= A_3 \operatorname{sen}\omega t + B_3 \cos\omega t \end{aligned} \tag{3.26}$$

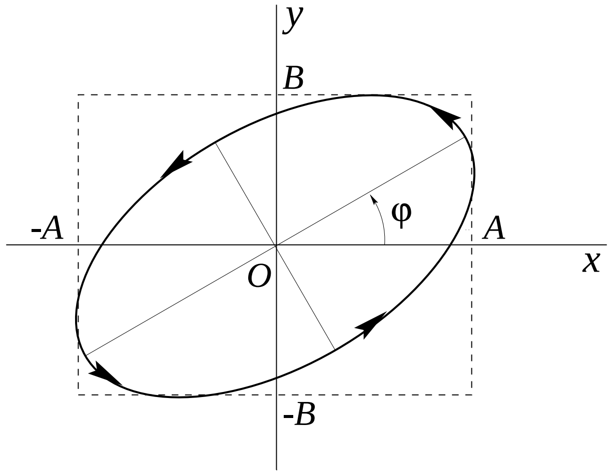


Figura 3.6: Trajetória elíptica do movimento de um oscilador harmônico bi-dimensional.

Determinam-se as seis constantes de integração a partir da posição e velocidade iniciais da partícula. As Equações (3.26) escritas na forma vetorial ficam

$$\vec{\mathrm{r}} = \vec{\mathrm{A}}\,\mathrm{sen}\,\omega t + \vec{\mathrm{B}}\cos\omega t$$

onde as componentes de $\vec{\mathrm{A}}$ são A_1, A_2 e A_3 e da mesma forma para $\vec{\mathrm{B}}$. Fica claro que o movimento se faz inteiramente em um único plano que é o plano comum aos dois vetores constantes $\vec{\mathrm{A}}$ e $\vec{\mathrm{B}}$, e que a trajetória da partícula nesse plano é uma elípse, como no caso bidimensional. A análise relativa à forma da trajetória elíptica feita no caso bidimensional também se aplica no caso tridimensional.

Oscilador não Isotrópico

Na discussão acima consideramos o oscilador tridimensional isotrópico, onde a força restauradora era independente da direção de deslocamento. Se a força restauradora depender da direção de deslocamento, temos o caso do oscilador não-isotrópico. Escolhendo adequadamente os eixos do sistema de coordenadas, as equações diferenciais do movimento para o oscilador não isotrópico são

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1 x \\ m\ddot{y} &= -k_2 y \\ m\ddot{z} &= -k_3 z \end{aligned} \tag{3.27}$$

Aqui temos um caso de três frequências de oscilação diferentes:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}$$

e as soluções são

$$x = A\cos(\omega_1 t + \alpha)$$

$$\begin{aligned} y &= B\cos(\omega_2 t + \beta) \\ z &= C\cos(\omega_3 t + \gamma) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Também nesse caso, as seis constantes de integração das equações acima ficarão determinadas a partir das condições iniciais. A oscilação resultante da partícula fica inteiramente contida dentro de uma caixa retangular (cujos lados são $2A$, $2B$ e $2C$) centrada na origem. Se as frequências ω_1, ω_2 e ω_3 forem redutíveis a uma medida comum, isto é, se

$$\frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2} = \frac{\omega_3}{n_3} \tag{3.29}$$

onde n_1, n_2 e n_3 são inteiros, a trajetória, chamada de Figura de Lissajous, se fechará, porque depois de um tempo $2\pi n_1/\omega_1 = 2\pi n_2/\omega_2 = 2\pi n_3/\omega_3$ a partícula retornará à sua posição inicial e o movimento se repetirá. (Na Equação (3.29) cancelamos os fatores inteiros comuns). Por outro lado, se os ω's não forem redutíveis a um fator comum, a trajetória não será fechada. Neste caso dizemos que a trajetória pode encher completamente a caixa retangular mencionada acima, pelo menos no sentido de que se esperarmos um tempo suficientemente longo, a partícula chegará arbitrariamente perto de qualquer ponto dado.

Em muitos casos a força restauradora líquida exercida em um dado átomo numa substância cristalina sólida é aproximadamente linear nos deslocamentos. As frequências de oscilação resultantes normalmente ficam na região infravermelho do espectro: 10^{12} a 10^{14} vibrações por segundo.

3.11 Movimento de Partículas Carregadas em Campos Elétricos e Magnéticos

Quando uma partícula eletricamente carregada estiver na vizinhança de outras partículas carregadas, ela sofrerá a ação de uma força. Dizemos que esta força $\vec{\mathrm{F}}$ é devida ao campo elétrico $\vec{\mathrm{E}}$ que tem origem nestas outras cargas. Escrevemos

$$\vec{\mathrm{F}} = q\vec{\mathrm{E}}$$

onde q é a carga elétrica da partícula em questão. A equação de movimento da partícula é então

$$m\frac{d^2\vec{\mathrm{r}}}{dt^2} = q\vec{\mathrm{E}} \tag{3.30}$$

ou, em componentes

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qE_x \\ m\ddot{y} &= qE_y \\ m\ddot{z} &= qE_z \end{aligned}$$

As componentes do campo são, em geral, funções das coordenadas de posição x, y e z. No caso de campos que variam com o tempo (isto é, se as cargas que produzem $\vec{\mathrm{E}}$ estiverem em movimento) as componentes, evidentemente, também envolverão t.

Vamos considerar um caso simples, ou seja aquele de um campo elétrico uniforme. Escolhemos um dos eixos, digamos o eixo z, na direção do campo. Então $E_x = E_y = 0$, e $E = E_z$. As equações diferenciais do movimento de uma partícula carregada neste campo são

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \ddot{z} = \frac{qE}{m} = \text{constante}$$

Estas equações são identicas às equações para um projétil em um campo gravitacional uniforme. A trajetória, portanto, é uma parábola.

Os livros textos de Eletromagnetismo mostram que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{E}} = 0$$

se $\vec{\mathrm{E}}$ for devido a cargas estáticas. Isto significa que o movimento em tal campo é conservativo, e que existe uma função potencial ϕ onde $\vec{\mathrm{E}} = -\vec{\nabla}\phi$. A energia potencial de uma partícula de carga q neste campo é $q\phi$, e a energia total é constante e igual a $\frac{1}{2}mv^2 + q\phi$.

Na presença de um campo magnético estático ($\vec{\mathrm{B}}$) a força atuante em uma carga móvel é convenientemente expressa pelo produto vetorial

$$\vec{\mathrm{F}} = q(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}) \tag{3.31}$$

onde $\vec{\mathrm{v}}$ é a velocidade e q é a carga. A equação diferencial do movimento de uma partícula movendo-se em um campo puramente magnético é então

$$m\frac{d^2\vec{\mathrm{r}}}{dt^2} = q(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}) \tag{3.32}$$

Desta equação concluimos que a aceleração é sempre perpendicular à direção do movimento. Isto significa que a componente tangencial da aceleração ($\dot{v}$) é nula, e logo, a partícula move-se com o módulo da velocidade constante. Este fato é verdadeiro mesmo quando $\vec{\mathrm{B}}$ é uma função dependente da posição $\vec{\mathrm{r}}$, desde que essa função não varie com o tempo.

Exemplo

Vamos examinar o movimento de uma partícula carregada em um campo magnético constante uniforme. Vamos escolher o eixo z na direção do campo, isto é,

$$\vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{k}}\,B$$

A equação diferencial do movimento é

$$m\frac{d^2\vec{\mathrm{r}}}{dt^2} = q(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}) = qB\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\mathrm{k}} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$m(\vec{\imath}\,\ddot{x} + \vec{\jmath}\,\ddot{y} + \vec{\mathrm{k}}\,\ddot{z}) = qB(\vec{\imath}\,\dot{y} - \vec{\jmath}\,\dot{x})$$

Igualando as componentes temos,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qB\dot{y} \\ m\ddot{y} &= -qB\dot{x} \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Aqui, pela primeira vez, encontramos um conjunto de equações diferenciais que não são do tipo separáveis. A solução é relativamente simples, todavia, porque podemos integrar uma única vez no tempo e obter

$$\begin{aligned} m\dot{x} &= qBy + c_1 \\ m\dot{y} &= -qBx + c_2 \\ \dot{z} &= \text{constante} = \dot{z}_0 \end{aligned}$$

ou

$$\dot{x} = \omega y + C_1 \qquad \dot{y} = -\omega x + C_2 \qquad \dot{z} = \dot{z}_0 \tag{3.34}$$

onde usamos a abreviação $\omega = qB/m$. Os C's são constantes de integração, e $C_1 = c_1/m$, $C_2 = c_2/m$. Usando a expressão de $\dot{y}$ da segunda das Equações (3.34), na primeira das Equações (3.33), obtemos uma equação separada para x,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \omega^2 a \tag{3.35}$$

onde $a = C_2/\omega$. A solução é

$$x = a + A\cos(\omega t + \theta_0) \tag{3.36}$$

onde A e θ_0 são constantes de integração. Diferenciando esta equação com relação ao tempo, temos

$$\dot{x} = -A\omega\,\text{sen}(\omega t + \theta_0) \tag{3.37}$$

Esta expressão pode ser substituida no lado esquerdo da primeira das Equações (3.34) e a equação resultante resolvida para y. O resultado é

$$y = b - A\,\text{sen}(\omega t + \theta_0) \tag{3.38}$$

onde $b = C_1/\omega$. Para encontrarmos a forma da trajetória do movimento, eliminamos t entre as Equações (3.36) e (3.38) para obter

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = A^2 \tag{3.39}$$

A projeção da trajetória do movimento no plano xy é um círculo de raio A centrado no ponto (a, b). Como da terceira equação (3.34) a velocidade na direção z é constante, concluimos que a trajetória é uma helicóide. O eixo da hélice coincide com a direção do campo magnético, como pode ser visto na Figura 3.7. Derivando a Equação (3.38) encontramos

$$\dot{y} = -A\omega\cos(\omega t + \theta_0) \tag{3.40}$$

Eliminando o tempo das Equações (3.37) e (3.40) obtemos

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = A^2\omega^2 = A^2\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \tag{3.41}$$

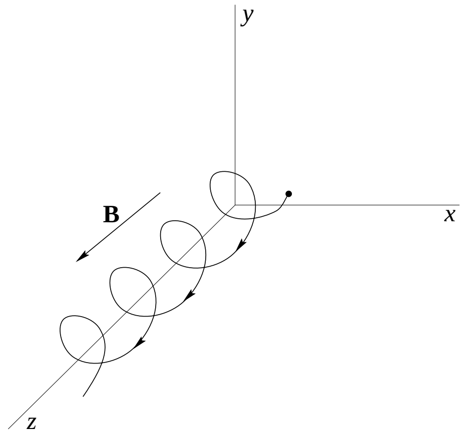


Figura 3.7: Trajetória helicoidal de uma partícula carregada movendo-se em um campo magnético.

chamando $v_1 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$, vemos que o raio A da hélice fica

$$A = \frac{v_1}{\omega} = \frac{mv_1}{qB} \tag{3.42}$$

Se a velocidade não tiver componente na direção z, a trajetória será um círculo de raio A. Fica evidente que A é diretamente proporcional ao módulo da velocidade v_1, e que a frequência angular ω do movimento na trajetória circular é independente da velocidade. ω é conhecida como a frequência do cíclotron. O cíclotron, inventado por Ernest Laurence, depende para sua operação do fato que ω é independente da velocidade.

3.12 Movimento Vinculado de uma Partícula

Quando uma partícula móvel estiver geometricamente presa no sentido de que deverá permanecer em uma superfície ou curva definida, diremos que o movimento é vinculado. Um pedaço de gelo deslizando em uma superfície curva, ou uma bolinha furada deslizando presa em um arame, são exemplos de movimento vinculado. O vínculo pode ser completo, como na bolinha ou pode ser parcial como no primeiro exemplo. Vínculos podem ser fixos, ou podem ser móveis. Neste capítulo estudaremos apenas vínculos fixos.

A Equação de Energia para Vínculos Lisos

A força resultante em uma partícula que se move sob a ação de um vínculo pode ser expressa como a soma vetorial da força externa $\vec{\mathrm{F}}$ e da força de vínculo $\vec{\mathrm{R}}$, onde $\vec{\mathrm{R}}$ é a reação do agente vinculador sobre a partícula. A equação de movimento pode ser escrita como

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \vec{\mathrm{F}} + \vec{\mathrm{R}} \tag{3.43}$$

Multiplicando escalarmente a equação acima por $\vec{\mathrm{v}}$, temos

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \;.\; \vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{F}} \;.\; \vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{R}} \;.\; \vec{\mathrm{v}} \tag{3.44}$$

No caso de vínculo liso – por exemplo, uma superfície sem atrito – a reação $\vec{\mathrm{R}}$ é normal à superfície ou curva enquanto a velocidade $\vec{\mathrm{v}}$ é tangente à superfície. Logo, $\vec{\mathrm{R}}$ é perpendicular a $\vec{\mathrm{v}}$ e o produto escalar $\vec{\mathrm{R}} \;.\; \vec{\mathrm{v}}$ se anula. A Equação (3.44) se reduz portanto a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{\mathrm{v}} \;.\; \vec{\mathrm{v}}\right) = \vec{\mathrm{F}} \;.\; \vec{\mathrm{v}}$$

Consequentemente, se $\vec{\mathrm{F}}$ for conservativa, poderemos integrar como na Seção 3.5, e obteremos a mesma relação de energia que a Equação (3.9), isto é

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x, y, z) = \text{constante} = E$$

Então apesar de permanecer na superfície ou na curva, a partícula move-se de modo a manter a energia total constante. É claro que esperávamos que isto acontecesse para vínculos sem atrito.

Exemplo

Coloca-se uma partícula no topo de uma esfera lisa de raio a. Se a partícula for ligeiramente perturbada, em que ponto ela abandonará a esfera?

As forças atuantes na partícula são a força da gravidade, para baixo, e a reação $\vec{\mathrm{R}}$ da superfície esférica. A equação de movimento é

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = m\vec{\mathrm{g}} + \vec{\mathrm{R}}$$

Vamos escolher eixos coordenados como os mostrados na Figura 3.8. A energia potencial é então mgz, e a equação da energia é

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = E$$

Usando as condições iniciais ($v = 0$ para $z = a$) encontramos $E = mga$, logo, quando a partícula desliza, sua velocidade é dada por

$$v^2 = 2g(a - z)$$

Tomando a componente radial da equação do movimento, podemos escrever a equação de força assim

$$-\frac{mv^2}{a} = -mg\cos\theta + R = -mg\frac{z}{a} + R$$

Então

$$R = mg\frac{z}{a} - \frac{mv^2}{a} = mg\frac{z}{a} - \frac{m}{a}2g(a - z) = \frac{mg}{a}(3z - 2a)$$

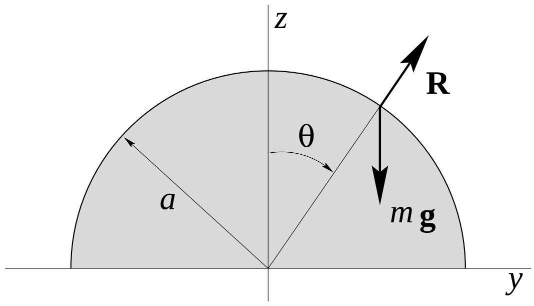


Figura 3.8: Forças atuantes em uma partícula que desliza em uma esfera lisa.

Logo R se anula quando $z = \frac{2}{3}a$ e neste ponto a partícula abandona a esfera. Isto poderia também ser conseguido observando que R muda de sinal neste ponto.

Movimento em uma Curva

No caso em que uma partícula estiver vinculada a mover-se em uma certa curva, a equação de energia juntamente com as equações paramétricas da curva

$$x = x(S) \qquad y = y(S) \qquad z = z(S)$$

são suficientes para determinar o movimento. (O parâmetro S é a distância medida ao longo da curva a partir de algum ponto de referência arbitrário). O movimento pode ser determinado considerando-se que a energia potencial e a energia cinética podem ser escritas em termos do parâmetro S apenas; $V(S)$ e $m\dot{S}^2$, respectivamente. Dessa maneira a equação de energia pode ser escrita

$$\frac{1}{2}m\dot{S}^2 + V(S) = E$$

de onde S (e dessa maneira x, y e z) pode ser obtido por integração. Fazendo o caminho contrário, diferenciando-se a equação acima com relação a t e cancelando o fator comum $\dot{S}$, obtemos a seguinte equação diferencial do movimento para a partícula:

$$m\ddot{S} + \frac{dV}{dS} = 0 \tag{3.45}$$

Esta equação pode ser colocada na forma equivalente

$$m\ddot{S} - F_S = 0$$

onde F_S é a componente da força externa $\vec{\mathrm{F}}$ na direção S. Isto significa que

$$F_S = -\frac{dV}{dS}$$

3.13 O Pêndulo Simples

O pêndulo simples ilustra bem as considerações acima. Uma partícula de massa m presa na extremidade de uma haste ou corda leve e inextensível movendo-se em um plano vertical, constitui o pêndulo simples. Tal pêndulo é também dinamicamente equivalente a uma bolinha furada deslizando presa a um fio com a forma de um aro vertical.

Na Figura 3.9, θ é o ângulo entre a vertical e a linha CP onde C é o centro da trajetória circular e P é a posição instantânea da partícula. A distância S é medida a partir da posição de equilíbrio O. Vemos, da figura, que a componente F_S da força da gravidade $m\vec{g}$ na direção de S é igual a $-mg\,\mathrm{sen}\,\theta$. Se l for o comprimento do pêndulo, então $\theta = S/l$. A equação diferencial de movimento então fica assim

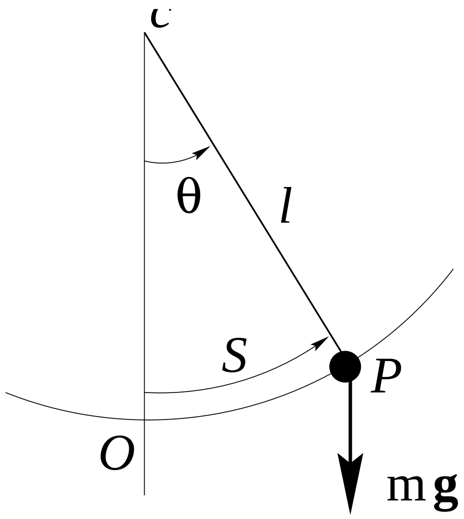


Figura 3.9: O Pêndulo Simples.

$$m\ddot{S} + mg\,\mathrm{sen}\left(\frac{S}{l}\right) = 0$$

ou, em termos de θ, ficaria

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

A energia potencial V pode ser escrita como mgz onde z é a distância vertical da partícula medida a partir de O, isto é,

$$V = mgz = mgl(1 - \cos\theta) = mgl - mgl\cos\left(\frac{S}{l}\right)$$

Aqui, então,

$$-\frac{dV}{dS} = -mg\,\mathrm{sen}\left(\frac{S}{l}\right) = mg\,\mathrm{sen}\,\theta = F_S.$$

Para conseguirmos uma solução aproximada da equação diferencial de movimento, consideremos que θ permaneça pequeno. Neste caso

$$\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$$

Logo

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

esta é a equação diferencial do oscilador harmônico. A solução, como já vimos na Seção 2.12 é

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{g/l}$, θ_0 é a amplitude de oscilação e ϕ_0 é um fator de fase. Dentro dos limites de validade dessa aproximação o movimento é harmônico simples e o período de oscilação é dado por:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{3.46}$$

que é uma fórmula elementar bem conhecida.

3.14 Solução mais Precisa do Pêndulo Simples e o Oscilador não Linear

A equação diferencial do movimento do pêndulo simples

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

é um caso especial de equação diferencial geral para o movimento sob a ação de uma força restauradora não linear, isto é, uma força que varia de maneira diferente da linear.

A equação do problema unidimensional geral sem amortecimento pode ser escrita

$$\xi + f(\xi) = 0 \tag{3.47}$$

onde ξ é a variável que representa o deslocamento a partir da posição de equilíbrio, tal que

$$f(0) = 0$$

Equações diferenciais não lineares normalmente exigem algum método de aproximação para suas soluções. Suponha que a função $f(\xi)$ seja desenvolvida como uma série de potência,

$$f(\xi) = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots$$

e levada na Equação (3.47) que se transformaria em

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots = 0 \tag{3.48}$$

que é a expansão da equação geral do movimento do oscilador não linear sem amortecimento. O termo $a_1\xi$ nesta equação é o termo linear. Se este termo for predominante, isto é, se a_1 for muito maior do que os outros coeficientes, então o movimento será aproximadamente harmônico com frequência angular $\sqrt{a_1}$. Uma solução mais precisa deve levar em consideração os termos restantes não lineares.

Como ilustração, vamos voltar ao problema do pêndulo simples. Se usarmos o desenvolvimento em série

$$\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots$$

e se retivermos apenas os dois primeiros termos, obteremos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta - \frac{g}{6l}\theta^3 = 0 \tag{3.49}$$

como uma segunda aproximação para a equação diferencial do movimento. Sabemos que o movimento é periódico. Vamos tentar uma solução na forma de uma função senoidal simples

$$\theta = A\cos\omega t$$

Inserindo-a na equação diferencial obteremos

$$-A\omega^2\cos\omega t + \frac{g}{l}A\cos\omega t - \frac{g}{6l}A^3\cos^3\omega t = 0$$

ou, depois de usar a identidade trigonométrica

$$\cos^3 u = \frac{3}{4}\cos u + \frac{1}{4}\cos 3u$$

teremos, depois de reagrupar os termos

$$\left(-A\omega^2 + \frac{g}{l}A - \frac{gA^3}{24l}\right)\cos\omega t - \frac{gA^3}{24l}\cos 3\omega t = 0$$

Excluindo o caso trivial $A = 0$, vemos que a equação acima não é válida para todos os valores de t. Dessa maneira nossa função tentativa $A\cos\omega t$ não pode ser uma solução. Observando que o termo em $\cos 3\omega t$ aparece na equação acima somos levados a tentar uma solução na forma

$$\theta = A\cos\omega t + B\cos 3\omega t \tag{3.50}$$

que deverá ser uma aproximação melhor do que $A\cos\omega t$. Verifica-se que isto é verdade. Levando esta solução na Equação (3.49), encontramos, depois de um tratamento idêntico ao que foi feito anteriormente

$$\left(-A\omega^2 + \frac{g}{l}A - \frac{gA^3}{8l}\right)\cos\omega t + \left(-9B\omega^2 + \frac{g}{l}B - \frac{gA^3}{24l}\right)\cos 3\omega t + (\text{termos em}$$

$$\text{potências mais altas de B e múltiplos mais altos de } wt) = 0$$

Novamente a equação não é válida para todos os valores de t, mas nossa aproximação será razoavelmente precisa se os coeficientes dos dois primeiros termos em cosseno puderem se anular separadamente:

$$-A\omega^2 + \frac{g}{l}A - \frac{gA^3}{8l} = 0 \qquad -9B\omega^2 + \frac{g}{l}B - \frac{gA^3}{24l} = 0$$

Da primeira equação

$$\omega^2 = \frac{g}{l}\left(1 - \frac{A^2}{8}\right) \tag{3.51}$$

Levando este valor de ω^2 na segunda equação, encontramos

$$B = -A^3 \frac{1}{3(64 + 27A^2)} \approx -\frac{A^3}{192}$$

Observando a Equação (3.50) vemos que a amplitude θ_0 da oscilação do pêndulo é dado por

$$\theta_0 = A + B = A - \frac{A^3}{192}$$

ou, se A for pequeno

$$\theta_0 \approx A$$

O significado da Equação (3.51) pode agora ser entendido. A frequência de oscilação depende da amplitude θ_0. Na verdade, podemos escrever

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{1 - \frac{1}{8}\theta_0^2}$$

e, para o período

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi}{\omega} &\approx \frac{2\pi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{8}\theta_0^2)}}\sqrt{\frac{l}{g}} \\ &\approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \dots\right) \\ &\approx T_0\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \dots\right) \end{aligned} \tag{3.52}$$

onde T_0 é o período para amplitude nula.

Esta análise, apesar de ser grosseira, levanta dois fatos essenciais na oscilação livre sob a ação de força restauradora não linear; isto é, o período de oscilação é uma função da amplitude de vibração, e a oscilação não é exatamente senoidal mas pode ser considerada como uma superposição de uma mistura de harmônicos. Pode ser mostrado que a vibração de um sistema não linear forçado por uma força puramente senoidal também será distorcido; isto é, conterá harmônicos. O auto-falante de um rádio ou um sistema de "som", por exemplo, pode introduzir distorção (harmônicos) acima e abaixo daquela produzida pelo sistema amplificador eletrônico.

3.15 Solução Exata do Movimento do Pêndulo Simples por Meio de Integrais Elípticas

Usando a equação de energia potencial do pêndulo simples podemos escrever a equação de energia na forma

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + mgl(1 - \cos\theta) = E \tag{3.53}$$

Se o pêndulo for deslocado de um ângulo θ_0 (a amplitude) e abandonado ($\dot{\theta}_0 = 0$), então $E = mgl(1 - \cos\theta_0)$. Levando este valor na equação de energia esta se reduzirá a

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{3.54}$$

Usando a identidade $\cos\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, podemos escrever

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{l}\left(\mathrm{sen}^2\,\frac{\theta_0}{2} - \mathrm{sen}^2\,\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.55}$$

é conveniente descrever o movimento em termos da variável ϕ definida pela equação

$$\mathrm{sen}\,\phi = \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} = \frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} \tag{3.56}$$

Derivando em relação ao tempo, obtemos

$$(\cos\phi)\dot{\phi} = \frac{1}{k}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\dot{\theta}}{2} \tag{3.57}$$

Usando as Equações (3.56) e (3.57) podemos prontamente escrever a equação (3.55) em termos de ϕ

$$\dot{\phi}^2 = \frac{g}{l}\left(1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi\right) \tag{3.58}$$

separando as variáveis e integrando a relação entre ϕ e t

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\,F(k,\phi) \tag{3.59}$$

A função $F(k,\phi) = \int_0^{\phi}\left(1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi\right)^{-\frac{1}{2}}\,d\phi$ é conhecida como integral elíptica incompleta do primeiro tipo. O período do pêndulo é obtido notando-se que θ aumenta de 0 até θ_0 em um quarto de ciclo. Vemos então que ϕ varia de 0 até $\frac{\pi}{2}$ no mesmo intervalo de tempo. Dessa maneira podemos escrever para o período T

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K(k) \tag{3.60}$$

A função $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\,\phi)^{-\frac{1}{2}}d\phi = F(k,\frac{\pi}{2})$ é conhecida como a integral elíptica completa do primeiro tipo. Os valores das integrais elípticas são tabelados. Podemos obter uma expressão aproximada desenvolvendo o integrando da Equação (3.60) pelo teorema binomial e integrando termo a termo. O resultado é

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \frac{k^2}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\phi + \ldots\right)d\phi = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \ldots\right) \tag{3.61}$$

Para pequenos valores de θ_0, temos

$$k^2 = \operatorname{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} \approx \frac{\theta_0^2}{4}$$

o que nos leva à expressão aproximada

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} + \ldots\right) \tag{3.62}$$

que concorda com o valor de T encontrado na seção anterior.

Exemplo

Encontre o período de um pêndulo simples oscilando com uma amplitude de 20°. Use tabelas de funções elípticas, e também compare com os valores calculados utilizando-se as aproximações descritas anteriormente.

Para uma amplitude de 20°, $k = \operatorname{sen} 10° = 0,17365$, e $\theta_0/2 = 0,17453$ radianos. Os resultados ficam

De tabelas e da Equação (3.60)	$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K(10°) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,(6,3312)$
Da Equação (3.61)	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 10°\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,(6,3306)$
Da Equação (3.62)	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,(6,3310)$
Da fórmula elementar	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \sqrt{\frac{l}{g}}\,(6,2832)$

3.16 O Problema Isocrônico

É interessante investigar se existe ou não uma curva de vínculo para a qual uma partícula oscilará sob a ação da gravidade isocronicamente, isto é, com um período que é independente da amplitude.

Seja θ o ângulo entre a horizontal e a tangente a curva de vínculo (Figura 3.10). A componente da força gravitacional na direção do movimento é $-mg \operatorname{sen}\theta$. A equação diferencial do movimento ao longo da trajetória de vínculo (considerado sem atrito) é então

$$m\ddot{S} = -mg \operatorname{sen}\theta$$

Contudo, se a equação acima representar movimento harmônico simples ao longo da curva, devemos ter

$$m\ddot{S} = -KS$$

Desse modo, uma curva de vínculo que satisfizer a equação

$$S = C \operatorname{sen}\theta$$

produzirá movimento harmônico simples.

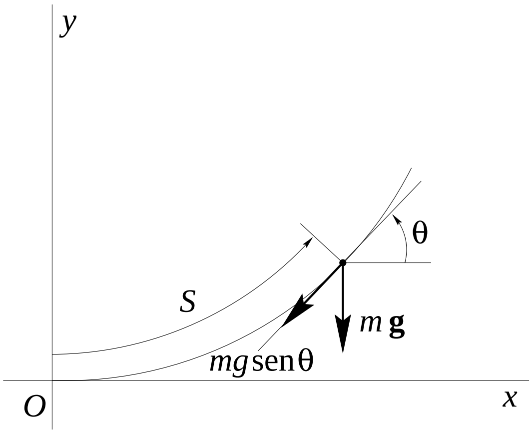


Figura 3.10: Forças envolvidas no caso isocrônico.

Podemos encontrar x e y em termos de θ a partir das equações acima,

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dS}\frac{dS}{d\theta} = (\cos\theta)(C\cos\theta)$$

Logo

$$x = \int C\cos^2\theta d\theta = \frac{C}{4}(2\theta + \operatorname{sen} 2\theta) \tag{3.63}$$

Do mesmo modo

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dS}\frac{dS}{d\theta} = (\operatorname{sen}\theta)(C\cos\theta)$$

e então

$$y = \int C\operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta = -\frac{C}{4}\cos 2\theta \tag{3.64}$$

Equações (3.63) e (3.64) são as equações paramétricas de uma ciclóide. Então uma curva de vínculo na forma de uma ciclóide produzirá um movimento em que S varia harmonicamente com o tempo, e o período de oscilação será independente da amplitude. Como corolário, vemos que uma partícula que começa a mover-se a partir do repouso numa curva cicloidal lisa gasta o mesmo tempo para alcançar o fundo independentemente do ponto de onde começa.

O físico e matemático Holandês Christian Huygens descobriu este fato quando tentava melhorar a precisão de pêndulos de relógio. Ele descobriu a teoria das evolutas e mostrou que a evoluta de uma ciclóide é também uma ciclóide. Dessa maneira, obrigando o pêndulo a descrever uma trajetória cicloidal o período será então, independente da amplitude. Apesar de simples, a idéia nunca teve muito uso prático.

3.17 O Pêndulo Esférico

Um problema clássico de movimento vinculado é o de uma partícula que é obrigada a mover-se em uma superfície esférica lisa, por exemplo, um pequeno corpo deslisando dentro de uma

bola esférica lisa. O caso talvez fique melhor ilustrado por um pequeno corpo pesado preso na extremidade de uma corda ou haste leve e inextensível que é livre para balançar em qualquer direção em torno de um ponto fixo, como na Figura 3.11. Este é o famoso pêndulo esférico.

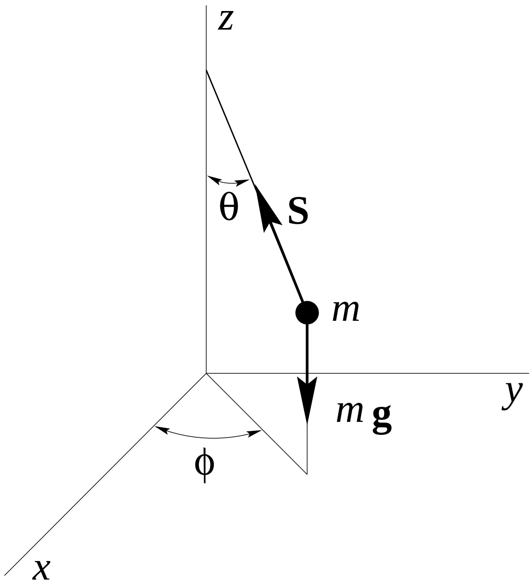


Figura 3.11: O pêndulo esférico.

Soluções aproximadas em coordenadas retangulares

Existem duas forças atuando na partícula, ou seja, a força da gravidade para baixo, e a tensão $\vec{\mathrm{S}}$ da corda ou haste vinculadora. A equação diferencial do movimento é

$$m\ddot{\vec{\mathrm{r}}} = m\vec{\mathrm{g}} + \vec{\mathrm{S}}$$

Escolhendo o eixo z na vertical, as componentes retangulares da equação do movimento são

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= S_x \\ m\ddot{y} &= S_y \\ m\ddot{z} &= S_z - mg \end{aligned}$$

Uma solução aproximada é prontamente conseguida para o caso onde o deslocamento a partir da posição de equilíbrio é muito pequeno. O valor da tensão é aproximadamente constante e igual a mg, e temos $|x| \ll l$, $|y| \ll l$, $z = 0$. Dessa maneira as componentes x y de $\vec{\mathrm{S}}$ são dadas aproximadamente por

$$S_x \approx -mg\frac{x}{l}$$

$$S_y \approx -mg\frac{y}{l}$$

que podem ser facilmente verificadas a partir da geometria da figura. As equações diferenciais do movimento em x e y se reduzem então a

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{l}y = 0$$

que são similares às equações do oscilador harmônico bidimensional tratado anteriormente na Seção 3.10. As soluções, como já vimos são

$$x = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$y = B\cos(\omega t + \beta)$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ como no pêndulo simples.

Dentro dos limites de nossa aproximação o movimento é tal que sua projeção no plano xy é uma elípse. Existem, claro, casos especiais em que a projeção se reduz a uma linha reta, ou a um círculo, dependendo das condições iniciais.

Solução em coordenadas esféricas

Usaremos coordenadas esféricas (veja a Figura 3.11) para um tratamento do pêndulo esférico mais preciso do que foi feito anteriormente. A tensão $\vec{\mathrm{S}}$ tem apenas componente radial, mas o peso $m\vec{g}$ tem ambas, uma componente radial $mg\cos\theta$ e uma transversal $-mg\,\mathrm{sen}\,\theta$. Desse modo a equação diferencial do movimento escrita em componentes esféricas fica

$$\begin{aligned} ma_r &= F_r = mg\cos\theta - S \\ ma_\theta &= F_\theta = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta \\ ma_\phi &= F_\phi = 0 \end{aligned}$$

As três componentes da aceleração a_r, a_θ e a_ϕ foram dadas no Capítulo 1, Seção 1.25. Já que o vínculo é

$$r = l = \text{constante}$$

podemos ignorar a componente radial da aceleração. As outras duas componentes se reduzem a

$$\begin{aligned} a_\theta &= l\ddot{\theta} - l\dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\ a_\phi &= l\ddot{\phi}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2l\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta \end{aligned}$$

Transpondo termos e fazendo os cancelamentos óbvios, as equações diferenciais em θ e ϕ tornam-se

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \tag{3.65}$$

$$\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}\,\mathrm{sen}^2\,\theta) = 0 \tag{3.66}$$

A segunda equação implica que a quantidade entre parênteses é constante. Vamos chamá-la h. Na verdade, ela é o momentum angular (por unidade de massa) em torno do eixo vertical. Esta grandeza é constante porque não existe nenhum momento de força em torno deste eixo. Podemos, então, escrever

$$\dot{\phi} = \frac{h}{\operatorname{sen}^2 \theta} \tag{3.67}$$

Levando o valor de $\dot{\phi}$ na Equação (3.65), obtemos uma equação na coordenada θ apenas

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta - h^2 \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = 0 \tag{3.68}$$

É instrutível considerar neste ponto alguns casos especiais. Primeiro, se o ângulo ϕ for constante, então $\dot{\phi} = 0$ e logo $h = 0$.

Como consequência, a Equação (3.68) se reduz a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

que é, exatamente a equação diferencial do pêndulo simples. O movimento se faz no plano $\phi = \phi_0 =$ constante.

O segundo caso especial é aquele do pêndulo cônico; $\theta = \theta_0 =$ constante. Neste caso $\dot{\theta} = 0$ e $\ddot{\theta} = 0$, logo a Equação (3.68) se reduz a

$$\frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta_0 - h^2 \frac{\cos\theta_0}{\operatorname{sen}^3\theta_0} = 0$$

ou

$$h^2 = \frac{g}{l}\operatorname{sen}^4\theta_0 \sec\theta_0 \tag{3.69}$$

Usando o valor de h da Equação (3.69), encontramos a partir da Equação (3.67)

$$\dot{\phi}_0^2 = \frac{g}{l}\sec\theta_0 \tag{3.70}$$

que é a condição de movimento cônico para o pêndulo.

Esta última equação pode ser obtida também considerando-se as forças atuantes na partícula durante seu movimento circular conforme a Figura 3.12. A aceleração é constante em módulo, isto é, $\rho\dot{\phi}^2 = (l\operatorname{sen}\theta_0)\dot{\phi}_0^2$, e aponta diretamente para o centro da trajetória circular. Dessa maneira, podemos escrever as componentes horizontal e vertical

$$\begin{aligned} S\operatorname{sen}\theta_0 &= (ml\operatorname{sen}\theta_0)\dot{\phi}_0^2 \\ S\cos\theta_0 &= 0 \end{aligned}$$

que se reduz à Equação (3.70) depois de eliminarmos S.

Vamos agora considerar o caso em que o movimento é quase cônico; isto é; o valor de θ permanece próximo do valor θ_0. Substituindo na Equação (3.68) h^2 por seu valor dado em (3.69), encontramos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\left(\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^4\theta_0 \cos\theta}{\cos\theta_0 \operatorname{sen}^3\theta}\right) = 0 \tag{3.71}$$

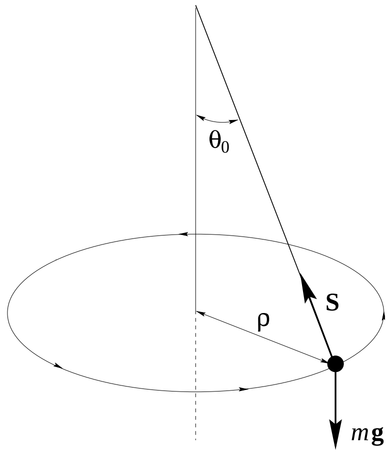


Figura 3.12: O caso cônico do pêndulo esférico.

É conveniente, a esta altura, introduzir a nova variável ξ definida como

$$\xi = \theta - \theta_0$$

A expressão entre parênteses na Equação (3.71) pode ser desenvolvida como uma série de potências em ξ de acordo com a fórmula conhecida

$$f(\xi) = f(0) + f'(0)\xi + f''(0)\frac{\xi^2}{2^{\text{‘}}} + \dots$$

Depois de executar as operações indicadas encontramos que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 3\cos\theta_0 + \sec\theta_0$. Como estamos interessados no caso de pequenos valores de ξ, desprezamos potências mais altas do que a primeira, e a Equação (3.71) pode ser escrita

$$\ddot{\xi} + \frac{g}{l}b\xi = 0 \tag{3.72}$$

onde $b = 3\cos\theta_0 + \sec\theta_0$. O movimento em ξ ou θ é dado então por

$$\xi = \theta - \theta_0 = \xi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{gb}{l}}t + E\right) \tag{3.73}$$

Então θ oscila harmonicamente em torno do valor θ_0 com um período

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{gb}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(3\cos\theta_0 + \sec\theta_0)}} \tag{3.74}$$

O valor de $\dot{\phi}$, dado pela Equação (3.67), não difere muito do valor dado pelo movimento puramente cônico $\dot{\phi}_0$, indicando que ϕ aumenta estacionariamente durante a oscilação de θ em torno de θ_0. A Figura 3.13 mostra a trajetória da partícula. Durante uma oscilação completa de θ o valor do ângulo azimutal ϕ aumenta de

$$\phi_1 \approx \dot{\phi}_0 T_1$$

Usando os valores de $\dot{\phi}_0$ e T_1 dados acima, encontramos

$$\phi_1 = 2\pi \left(3\cos^2\theta_0 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Seja ρ o raio do círculo para $\theta = \theta_0$, como na Figura 3.12. Então $\cos^2\theta_0 = 1 - \frac{\rho^2}{l^2}$, consequentemente $\phi_1 = 2\pi\,(4 - 3\rho^2/l^2)^{-\frac{1}{2}}$. Então ϕ_1 é ligeiramente maior que π. Desenvolvendo-se em potência de ρ encontramos que o incremento $\Delta\phi$ é dado por

$$\Delta\phi \approx \frac{3\pi}{8}\frac{\rho^2}{l^2} + \ldots$$

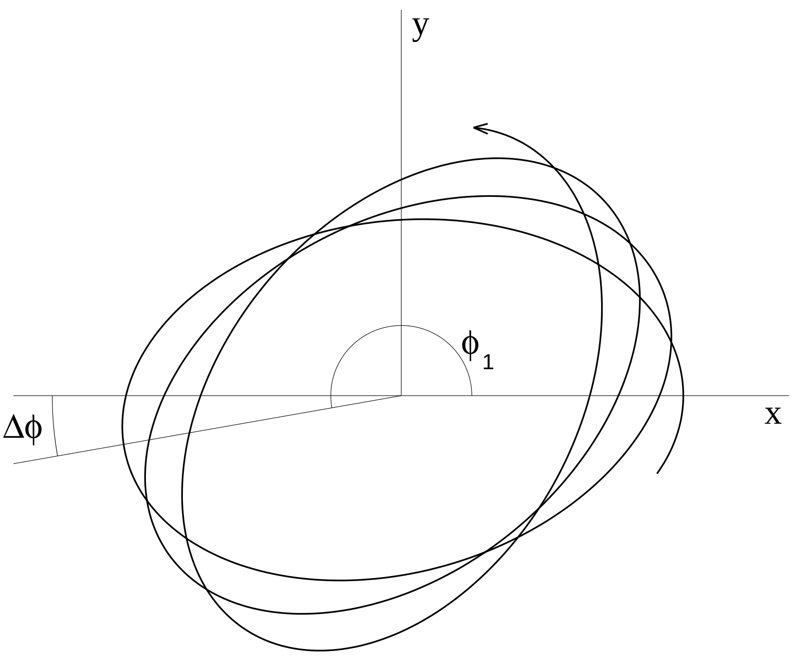


Figura 3.13: Projeção no plano xy da trajetória de movimento do pêndulo esférico.

No início desta seção provamos que a projeção da trajetória do pêndulo no plano xy era aproximadamente uma elípse para ângulo θ pequeno. Podemos agora interpretar o resultado acima dizendo que o eixo maior da elípse não está estacionário, mas precessa na direção de ϕ crescente. O eixo da elípse gira de $\Delta\phi$ durante cada oscilação completa de θ. A Figura 3.13 ilustra isso.

Considerações de energia — Limites do movimento vertical

Afim de relacionar a amplitude da oscilação vertical do pêndulo esférico com os parâmetros do problema, é vantajoso usar a equação de energia. Na nossa notação, a energia potencial é

$$V = -mgl\cos\theta$$

Para encontrar a energia cinética usamos o fato de que as componentes da velocidade em coordenadas esféricas são $(\dot{r},\ r\dot{\theta},\ r\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta)$. Como $r = l =$ constante, temos $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta)$. A equação de energia fica

$$E = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\operatorname{sen}^2\theta\right) - mgl\cos\theta$$

Vamos resolver esta equação para $\dot{\theta}^2$. Para conseguir isto, usamos a relação, desenvolvida anteriormente, $\dot{\phi} = h/\operatorname{sen}^2\theta$. Vamos colocar ainda $\cos\theta = u$. O resultado é

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2E}{ml^2} + \frac{2g}{l}u - \frac{h^2}{1-u^2} = f(u) \tag{3.75}$$

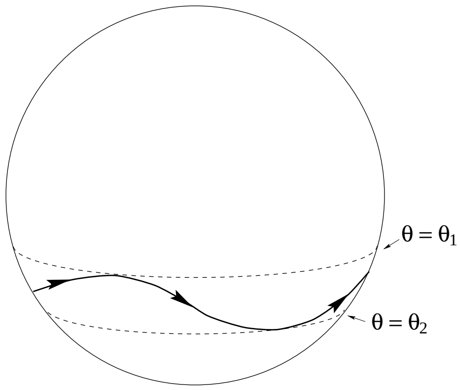


Figura 3.14: Ilustrando o movimento vertical do pêndulo esférico.

As raízes da equação $f(u) = 0$ determinam os limites, ou os pontos de retorno da oscilação em θ, porque $\dot{\theta}$ se anula nestas raízes. O limite fica restrito para aqueles valores de θ que tornam $f(u)$ positivo. Dessa maneira a oscilação vertical fica entre dois círculos horizontais, veja a Figura 3.14. Se, em particular, as duas raízes reais que ficam entre $+1$ e -1 forem iguais, então o movimento fica confinado a um único círculo horizontal, isto é, temos o caso do pêndulo cônico.

Exercícios de Treinamento

3.1 Calculando o rotacional encontre quais das seguintes forças são conservativas:

a) $\vec{F} = \vec{i}x + \vec{j}y$

b) $\vec{F} = \vec{i}y + \vec{j}x$

c) $\vec{F} = \vec{i}y - \vec{j}x$

d) $\vec{F} = \vec{i}xy + \vec{j}yz + \vec{k}zx$

e) $\vec{F} = \vec{i}yz + \vec{j}zx + \vec{k}xy$

3.2 Determine o valor da constante c que tornam as seguintes forças conservativas:

a) $\vec{\mathrm{F}} = \vec{\imath}xy + \vec{\jmath}cx^2$

b) $\vec{\mathrm{F}} = \vec{\imath}\frac{z}{y} + \vec{\jmath}c\frac{xz}{y^2} + \vec{\mathrm{k}}\frac{x}{y}$

3.3 Encontre a força associada a cada uma das seguintes funções energia potencial

a) $V = xyz$

b) $V = k\left(x^\alpha + y^\beta + z^\gamma\right)$

c) $V = kx^\alpha y^\beta z^\gamma$

d) $V = ke^{(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$

3.4 Encontre a função energia potencial para aquelas forças do problema (3.1) que forem conservativas.

3.5 Uma partícula de massa m move-se no campo de força dado pela função energia potencial do exercício 3.3 (a). Se a partícula passa pela origem com velocidade v_0, qual será sua velocidade se e quando passar pelo ponto (2,2,2)?

Problemas

3.6 Considere as duas funções força

a) $\vec{\mathrm{F}} = \vec{\imath}x + \vec{\jmath}y$

b) $\vec{\mathrm{F}} = \vec{\imath}y - \vec{\jmath}x$

Verifique que (a) é conservativa e (b) é não conservativa mostrando que a integral $\int \vec{\mathrm{F}} \,.\, d\vec{\mathrm{r}}$ é independente da trajetória de integração para (a), mas não para (b), tomando dois caminhos para os quais a origem (0,0) é o ponto de partida e (1,1) é o ponto de chegada. Para uma trajetória tome a linha $x = y$. Para a outra, tome o eixo y até o ponto (0,1) e depois a linha $y = 1$ até o ponto (1,1).

3.7 Mostre que a variação da gravidade com a altura pode ser explicada aproximadamente pela seguinte função energia potencial:

$$V = mgz\left(1 - \frac{z}{R}\right)$$

onde R é o raio da Terra. Encontre a força associada com esta função energia potencial. Deste resultado, encontre as componentes da equação diferencial do movimento de um projétil submetido a esta força.

3.8 Um projétil é lançado da origem com velocidade inicial v_0 com ângulo de elevação θ em relação a horizontal. Mostre que se desprezarmos a resistência do ar e se o solo for tomado como nível, o projétil atinge o solo a uma distância $\frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g}$ da origem. Este é o alcance horizontal do projétil. Mostre também que o decréscimo no alcance horizontal é aproximadamente $4v_0^3\gamma \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen} 2\theta/3g^2$ no caso de resistência do ar proporcional à velocidade (caso linear).

3.9 Partículas de lama são lançadas da periferia de uma roda que rola sem deslizar. Se a roda tiver uma velocidade para a frente v_0 e se seu raio for b, mostrar que a maior altura acima do solo que a lama pode atingir é

$$b + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{gb^2}{2v_0^2}$$

Em que ponto da roda girante irá a lama abandoná-la?

3.10 Um canhão é assentado na parte mais baixa de um morro de declive constante ϕ. Mostre que o alcance desta arma medida a partir da encosta do morro é

$$\frac{2v_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}(\theta - \phi)}{g \cos^2 \phi}$$

onde θ é o ângulo de elevação do canhão. Mostre também que o valor máximo do alcance medido ao longo da encosta é

$$\frac{v_0^2}{g(1 + \operatorname{sen}\phi)}$$

3.11 Escreva na forma de componentes a equação diferencial de movimento de um projétil para o caso de resistência do ar proporcional ao quadrado da velocidade. Estas equações são separáveis? Mostre que a componente x da velocidade é

$$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-\gamma S}$$

onde S é a distância percorrida pelo projétil ao longo da trajetória.

3.12 As condições iniciais para um oscilador isotrópico bi-dimensional são: $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = B$ $\dot{y}(0) = \omega C$ onde ω é a frequência de oscilação. Mostre que o movimento se dá inteiramente dentro de um retângulo de dimensões $2A$ e $2\sqrt{B^2 + C^2}$. Encontre a inclinação ϕ do eixo da elipse em termos de A, B e C.

3.13 Uma partícula de massa unitária move-se no potencial do oscilador harmônico não isotrópico tri-dimensional

$$V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$$

Se a partícula passa pela origem com velocidade unitária na direção (1,1,1) no instante $t = 0$, determine x, y e z como funções do tempo.

3.14 Um átomo esta situado em uma rede cristalina cúbica simples. Se a energia potencial de interação entre dois átomos quaisquer é da forma $cr^{-\alpha}$ onde c e α são constantes e r é a distância entre dois átomos, mostre que a energia total de interação de um dado átomo com seus seis vizinhos mais próximos é aproximadamente o potencial do oscilador harmônico tri-dimensional

$$V = A + B\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

onde A e B são constantes. (Nota: Considere que os seis átomos vizinhos estão fixos e localizados nos pontos ($\pm d$,0,0), (0,$\pm d$,0), (0,0,$\pm d$), e que o deslocamento (x,y,z) da posição de equilíbrio (0,0,0) do átomo é pequeno se comparado com d). Então $V = \sum c r_i^{-\alpha}$ onde $r_1 = \sqrt{(d-x)^2 + y^2 + z^2}$ com expressão semelhante para r_2, r_3, ..., r_6. Use o teorema binomial para obter o resultado desejado.

3.15 Um eletron move-se em um campo de força composto de um campo elétrico uniforme $\vec{\mathrm{E}}$ e um campo magnético uniforme $\vec{\mathrm{B}}$ que faz ângulo reto com $\vec{\mathrm{E}}$. Seja $\vec{\mathrm{E}} = \vec{\jmath} E$ e $\vec{\mathrm{B}} = \vec{\mathrm{k}} B$. Considere a posição inicial do eletron na origem com velocidade inicial $\vec{\mathrm{v}}_0 = \vec{\imath} v_0$ na direção x. Encontre o movimento resultante da partícula. Mostre que a trajetória do movimento é uma ciclóide:

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{sen} \omega t + bt \\ y &= c(1 - \cos \omega t) \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Movimento cicloidal de eletrons é utilizado no magnetron – um tubo eletrônico usado para produzir ondas de rádio de alta frequência.

3.16 Uma partícula foi colocada na superfície externa de uma esfera lisa de raio b a uma distância $b/2$ acima do plano central. Determine em que ponto a partícula abandona a superfície, depois que ela começa a deslizar para baixo.

3.17 Uma bolinha (conta) desliza em um fio liso dobrado na forma de um aro de raio b. Se o aro é vertical, e se a bolinha estava inicialmente em repouso, em um ponto nivelado com o centro do aro, encontre a velocidade da bolinha no ponto mais baixo do aro. Encontre também a reação do aro sobre a bolinha neste ponto.

3.18 No problema acima determine o tempo que a bolinha gasta para atingir o ponto mais baixo do aro.

3.19 Em uma experiência de laboratório um pêndulo simples é usado para se determinar o valor de g. Se a amplitude de oscilação do pêndulo é 30°, encontre o erro cometido ao se usar a fórmula elementar

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

3.20 Um pêndulo esférico de 1 metro de comprimento está executando pequenas oscilações em torno de um ângulo cônico θ_0. Se $\theta_0 = 30°$, encontre o período do movimento cônico, o período de oscilação de θ em torno de θ_0 e o ângulo de precessão $\Delta\phi$.

3.21 Prove que as duas raízes reais da equação $f(u) = 0$, Equação (3.75), que estão entre $+1$ e -1 são iguais no caso de pêndulo cônico.

3.22 A corda de um pêndulo esférico de comprimento l está inicialmente fazendo um ângulo de 90° com a vertical. Dá-se à massa do pêndulo uma velocidade inicial v_0 perpendicular à corda. Se $v_0^2 = gl/2$ encontre o ponto mais baixo atingido pela massa do pêndulo durante seu movimento. (Sugestão: A partir das condições iniciais $u = 0$ é uma raiz da equação $f(u) = 0$).

Respostas de problemas selecionados de números ímpares

3.1 (a), (b), e (e) são conservativas.

3.3 (a) $\vec{\mathrm{F}} = -(\vec{\imath}yz + \vec{\jmath}xz + \vec{\mathrm{k}}\,xy)$

(c) $\vec{\mathrm{F}} = -kx^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}(\vec{\imath}\alpha x^{-1} + \vec{\jmath}\beta y^{-1} + \vec{\mathrm{k}}\,\gamma z^{-1})$

3.5 $\sqrt{v_0^2 - \frac{16}{m}}$

3.7 $F = -mg + \frac{2mgz}{r_T}$

3.11 $m\ddot{x} = -c\dot{x}\dot{S},\ \ m\ddot{y} = -c\dot{y}\dot{S},\ \ m\ddot{z} = -mg - c\dot{z}\dot{S}$

3.13 $x = 6^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{2}t)$, $y = 24^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{8}t)$, $z = 54^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{sen}(\sqrt{18}t)$

3.17 $v = \sqrt{2gb}$, $R = 3mg$

3.19 $T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K(15^{\circ})$

Capítulo 4

Dinâmica de um Sistema de Muitas Partículas

Ao estudarmos um sistema ou conjunto de muitas partículas livres, é importante que fiquemos interessados nas características gerais do movimento de tal sistema.

4.1 Centro de Massa e Momentum Linear

Consideremos um sistema constituído de n partículas de massas $m_1, m_2, \ldots m_n$, cujos vetores posição são, respectivamente $\vec{\mathrm{r}}_1, \vec{\mathrm{r}}_2, \ldots \vec{\mathrm{r}}_n$. Definimos o centro de massa do sistema como o ponto cujo vetor posição $\vec{\mathrm{r}}_{cm}$ (Figura 4.1) é dado por:

$$\vec{\mathrm{r}}_{cm} = \frac{m_1\vec{\mathrm{r}}_1 + m_2\vec{\mathrm{r}}_2 + \ldots m_n\vec{\mathrm{r}}_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n} = \frac{\sum m_i\vec{\mathrm{r}}_i}{m} \tag{4.1}$$

onde $m = \sum m_i$ é a massa total do sistema. A definição acima é certamente equivalente às três equações:

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{m} \qquad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{m} \qquad z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

Definimos o momentum linear $\vec{\mathrm{P}}$ do sistema como o vetor soma dos momenta individuais das partículas

$$\vec{\mathrm{P}} = \sum \vec{\mathrm{p}}_i = \sum m_i\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} \tag{4.2}$$

Da Equação (4.1), por diferenciação em relação ao tempo, temos

$$\vec{\mathrm{P}} = \sum m_i\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{i} = m\vec{\mathrm{V}}_{cm} \tag{4.3}$$

o que significa que o momentum linear do sistema de partículas é igual ao produto da velocidade do centro de massa pela massa total do sistema.

Suponha agora que existam forças externas $\vec{\mathrm{F}}_1, \vec{\mathrm{F}}_2, \ldots \vec{\mathrm{F}}_i \ldots \vec{\mathrm{F}}_n$ agindo nas respectivas partículas. Em adição suponha, também, que existam forças internas de interação entre (duas a duas) quaisquer partículas do sistema. Vamos denotar estas forças por $\vec{\mathrm{F}}_{ij}$, significando as

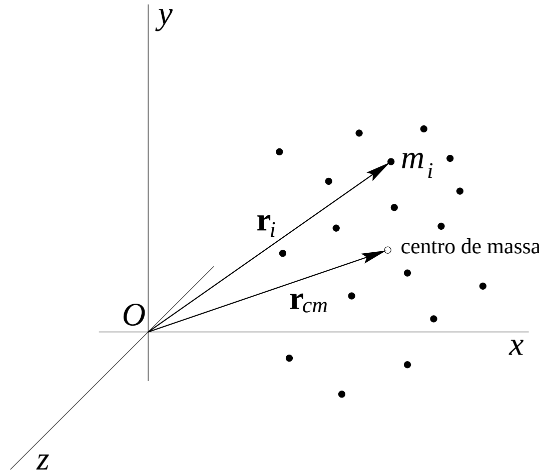


Figura 4.1: Centro de massa de um sistema de partículas.

forças exercidas na partícula i pela partícula j. A equação do movimento da partícula i é então

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1;j\neq i}^{n} \vec{F}_{ij} = m_i\ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{p}}_i \tag{4.4}$$

onde $\vec{F}_i$ é a força externa total agindo em i. O segundo termo da equação acima corresponde à soma de todas as forças internas exercidas na partícula i pelas outras partículas do sistema. Somando a expressão (4.4) para todas as partículas, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1;j\neq i}^{n} \vec{F}_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i \tag{4.5}$$

Na somatória dupla, acima, para cada força $\vec{F}_{ij}$ existirá também a força $\vec{F}_{ji}$ e elas são iguais e opostas

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \tag{4.6}$$

por consequência da terceira lei de Newton. Desta maneira, as forças internas cancelam-se duas a duas e a somatória dupla vale zero. Podemos reescrever a Equação (4.5) do seguinte modo

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}} = m\vec{a}_{cm} \tag{4.7}$$

em outras palavras a aceleração do centro de massa de um sistema de partículas é a mesma que uma única partícula de massa igual à massa de todo o sistema teria se submetida a uma única força igual à soma de todas as forças externas.

Considere, por exemplo, um conjunto de partículas movendo-se em um campo gravitacional uniforme. Uma vez que $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$, para cada partícula, teremos

$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i\vec{g} = m\vec{g}$$

lembre-se que $\vec{g}$ é constante se o campo for uniforme. Dai podemos tirar que

$$\vec{a}_{cm} = \vec{g} \tag{4.8}$$

Desta maneira, o centro de massa de uma granada que explodiu no ar continua seu caminho parabólico que ela possuia antes da explosão.

Em um caso especial em que não há nenhuma força externa agindo no sistema (ou se $\sum \vec{F}_i = 0$), temos que $\vec{a}_{cm} = 0$ e $\vec{V}_{cm} =$ constante. De modo que o momentum linear do sistema permanece constante

$$\sum \vec{p}_i = \vec{P} = m\vec{V}_{cm} = \text{constante} \tag{4.9}$$

Este é o princípio de conservação do momentum linear. Na mecânica Newtoniana a constância do momentum linear de um sistema isolado está diretamente ligada, e de fato é uma consequência da terceira lei de Newton. Mas, mesmo nos casos em que as forças entre as partículas não obedecem diretamente à lei da ação e reação, como no caso da força magnética entre duas partículas móveis carregadas, o princípio de conservação do momentum linear ainda é mantido, quando se leva em conta o momentum linear das partículas e do campo eletromagnético[1].

4.2 Momentum Angular do Sistema

Como foi visto no Capítulo 3 (Equação 3.4), o momentum angular de uma partícula é definido pelo produto vetorial $\vec{r} \times m\vec{v}$. O momentum angular $\vec{L}$ de um sistema de partículas é definido como a soma vetorial dos momenta angular individuais das partículas

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i)$$

Calculemos a derivada temporal do momentum angular.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} (\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i) \tag{4.10}$$

aqui a primeira somatória é nula ($\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$) e na segunda somatória o produto $m_i\vec{a}_i$ corresponde à força total atuante na partícula i. Podemos então escrever

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1;j\neq i}^{n} \vec{F}_{ij}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1;j\neq i}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \tag{4.11}$$

Na expressão acima é usada a mesma nomenclatura da Seção 4.1, onde $\vec{F}_i$ corresponde à resultante externa de forças sobre a partícula i e $\vec{F}_{ij}$ é a força interna da partícula j sobre a partícula i. A somatória dupla da expressão (4.11) é constituida de pares

$$(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}) + (\vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}) \tag{4.12}$$

[1]Veja por exemplo, W. T. Scott, *The Physics of Eletricity and Magnetism*, 2ª ed. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

Se representarmos o vetor deslocamento da partícula j em relação à partícula i por $\vec{r}_{ij}$, podemos ver pela Figura 4.2 que

$$\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i \tag{4.13}$$

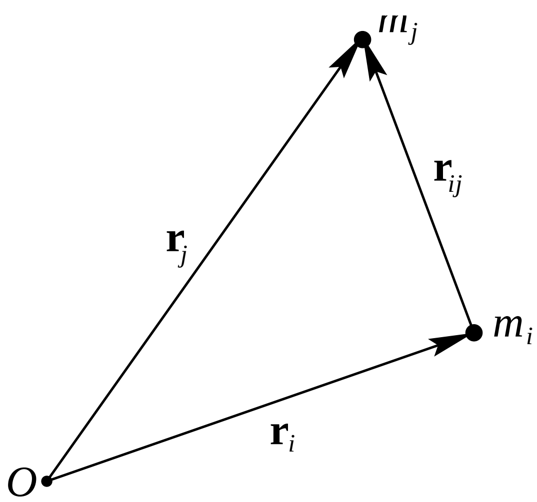


Figura 4.2: Definição do vetor $\vec{r}_{ij}$.

Como $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, podemos então reduzir a expressão (4.12) a

$$-\vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} \tag{4.14}$$

que é nula, caso as forças internas sejam centrais, isto é, caso elas ajam ao longo da linha que une as partículas. Desta forma, a somatória dupla de (4.11) é nula. De acordo com o que foi definido na Seção 1.12, o produto vetorial $\vec{r}_i \times \vec{F}_i$ corresponde ao momento da força externa $\vec{F}_i$. A soma $\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ é portanto, o momento total de todas as forças externas que agem sobre o sistema. Se denotarmos o momento externo total por $\vec{N}$, podemos escrever a Equação (4.11) do seguinte modo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \tag{4.15}$$

que significa: a taxa de variação do momentum angular do sistema com o tempo é igual ao momento total das forças externas agindo sobre o sistema.

Se o sistema é isolado, então $\vec{N} = 0$ e o momentum angular permanece constante tanto em módulo quanto em direção e sentido,

$$\vec{L} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \text{constante} \tag{4.16}$$

Este fato é estabelecido como **Princípio de Conservação do Momentum Angular**. Do mesmo modo que o momentum linear de um sistema isolado permanece constante, o momentum angular de um sistema isolado também permanece constante, mesmo no caso de um sistema de cargas móveis onde temos que considerar o momentum angular do campo eletromagnético[2].

[2] Ver nota nº 1.

4.3 Energia Cinética do Sistema de Partículas

A energia cinética total T do sistema de partículas é dada pela soma das energias individuais

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \ . \ \vec{v}_i) \tag{4.17}$$

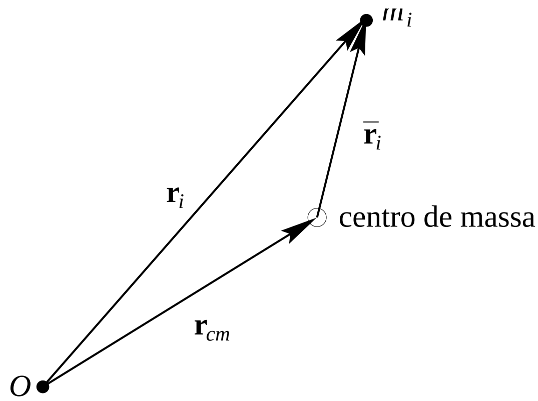


Figura 4.3: Definição de $\bar{\vec{r}}_i$.

Como mostra a Figura 4.3, podemos expressar cada vetor posição $\vec{r}_i$ na forma

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \bar{\vec{r}}_i \tag{4.18}$$

onde $\bar{\vec{r}}_i$ é a posição da partícula i em relação ao centro de massa. Tomando a derivada em relação ao tempo, teremos

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \bar{\vec{v}}_i \tag{4.19}$$

aqui, $\vec{v}_{cm}$ é a velocidade do centro de massa e $\bar{\vec{v}}_i$ a velocidade da partícula i em relação ao centro de massa. A expressão para T pode então ser escrita

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{cm} + \bar{\vec{v}}_i) \ . \ (\vec{v}_{cm} + \bar{\vec{v}}_i) = \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum m_i (\vec{v}_{cm} \ . \ \bar{\vec{v}}_i) + \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} v_{cm}^2 \sum m_i + \vec{v}_{cm} \ . \ \sum m_i \bar{\vec{v}}_i + \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 \end{aligned}$$

mas da Equação (4.18), temos

$$\sum m_i \bar{\vec{r}}_i = \sum m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}) = \sum m_i \vec{r}_i - m \vec{r}_{cm} = 0$$

analogamente, temos

$$\sum m_i \bar{\vec{v}}_i = 0$$

e a expressão para a energia cinética do sistema fica

$$T = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 \tag{4.20}$$

o que significa que a energia cinética total do sistema é dada pela soma da energia cinética de translação do centro de massa (1º termo) mais a energia cinética do movimento das partículas com relação ao centro de massa (último termo). Esta separação de energias cinéticas é conveniente, por exemplo, em Física molecular. Desta maneira, para um sistema molecular, a energia cinética total consiste na soma da energia cinética de translação de todas as moléculas, mais a energia de vibração e rotação de cada molécula.

4.4 Movimento de Dois Corpos que Interagem — Massa Reduzida

Consideremos o movimento de um sistema constituido de dois corpos (tomados como partículas) que interagem através de força central.

Vamos tomar um sistema isolado e portanto com centro de massa com velocidade constante. Por simplicidade tomaremos o centro de massa como origem. Temos então

$$m_1\vec{\bar{r}}_1 + m_2\vec{\bar{r}}_2 = 0 \tag{4.21}$$

onde, como mostra a Figura 4.4, os vetores $\vec{\bar{r}}_1$ e $\vec{\bar{r}}_2$ representam a posição das partículas de massa m_1 e m_2, respectivamente, em relação ao centro de massa. Agora, se $\vec{R}$ é o vetor posição da partícula 1 relativo à partícula 2, então

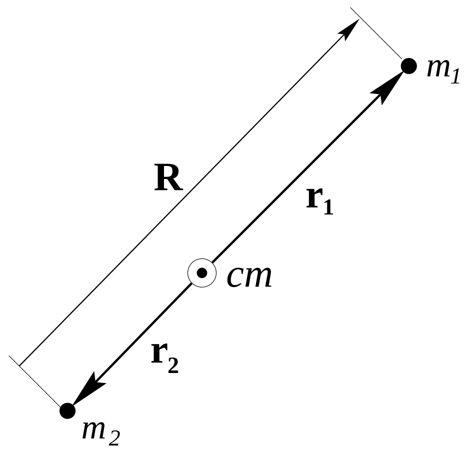


Figura 4.4: O problema dos dois corpos.

$$\vec{R} = \vec{\bar{r}}_1 - \vec{\bar{r}}_2 = \vec{\bar{r}}_1\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \tag{4.22}$$

a última passagem sai da Equação (4.21).

A equação diferencial do movimento da partícula 1 relativa ao centro de massa é

$$m_1\frac{d^2\vec{\bar{r}}_1}{dt^2} = \vec{F}_1 = f(R)\frac{\vec{R}}{R} \tag{4.23}$$

onde $f(R)$ é o módulo da força mútua entre as duas partículas. Usando a Equação (4.22), podemos escrever

$$\mu \frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = f(R)\frac{\vec{R}}{R} \tag{4.24}$$

onde

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{4.25}$$

A quantidade μ é conhecida por *massa reduzida*. A nova equação do movimento (4.24) dá o movimento da partícula 1 em relação à partícula 2 (tomada como fixa). Esta equação é precisamente a mesma equação para o movimento de uma partícula de massa μ movendo-se em um campo central de força dada por $f(R)$. Deste modo, o fato de m_2 estar em movimento relativo ao centro de massa está automaticamente computado quando se substitui m_1 por μ. Se os corpos têm massas iguais, então $\mu = m/2$. Por outro lado, se m_2 é muito maior que m_1, então μ é praticamente igual a m_1.

Para dois corpos que se atraem por gravitação nós temos

$$F(R) = -\frac{Gm_1 m_2}{R^2} \tag{4.26}$$

Neste caso, a equação do movimento é

$$\mu\ddot{\vec{R}} = -\frac{Gm_1 m_2}{R^2}\left(\frac{\vec{R}}{R}\right) \tag{4.27}$$

Esta é a mesma equação para o movimento de uma única partícula sujeita a uma força central regida por uma força dependente do inverso do quadrado da distância. Uma vez que a escolha dos subscritos (de m_1 ou m_2) é arbitrária, devemos concluir que o movimento de cada partícula em relação à outra é uma curva cônica com esta fixa no foco.

Deste modo, tomando o sistema Terra-Lua como um sistema isolado, a Lua descreve uma elipse em relação à Terra (com a Terra no foco) ou, se o referencial for a Lua, temos a Terra descrevendo uma elipse em torno da Lua (com a Lua no foco).

4.5 Colisões

Sempre que dois corpos colidem, a força que cada um exerce no outro durante o contato é uma força interna, caso os dois sejam considerados um sistema. O momentum linear total fica portanto inalterado. Podemos então escrever

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \tag{4.28}$$

ou equivalentemente,

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' \tag{4.29}$$

os subscritos 1 e 2 referem-se às duas partículas e as linhas caracterizam os momenta e velocidades das partículas **após** a colisão. As equações acima são completamente gerais.

Elas se aplicam a quaisquer dois corpos, independentemente de seus formatos, rigidez ou qualquer outra coisa.

Com relação ao balanço energético podemos escrever

$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2} + Q \tag{4.30}$$

ou

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 + Q \tag{4.31}$$

Aqui a quantidade Q é introduzida para indicar a energia total perdida, ou ganha, que ocorre resultante da colisão.

No caso de uma colisão perfeitamente elástica, não existe mudança na energia cinética total de modo que $Q = 0$. Se existir uma perda de energia, então Q é positivo. Esta colisão é denominada endoérgica. Pode também ocorrer que haja aumento da energia cinética total. Isto pode ocorrer por exemplo se houver alguma explosão no ponto de contato dos dois corpos. Neste caso, Q é negativo e a colisão é denominada exoérgica.

O estudo das colisões é de particular importância em física atômica e nuclear. Neste caso, os corpos envolvidos são átomos, núcleos ou partículas elementares como eletrons, protons ou outras.

Colisão Direta

Consideremos o caso especial de uma colisão frontal de dois corpos ou partículas, no qual o movimento ocorre inteiramente em uma linha reta como mostra a Figura 4.5. Neste caso, a equação de conservação do momentum linear (4.29) pode ser escrita sem a notação vetorial como

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \tag{4.32}$$

o sentido do movimento das partículas é dado pelo sinal de v.

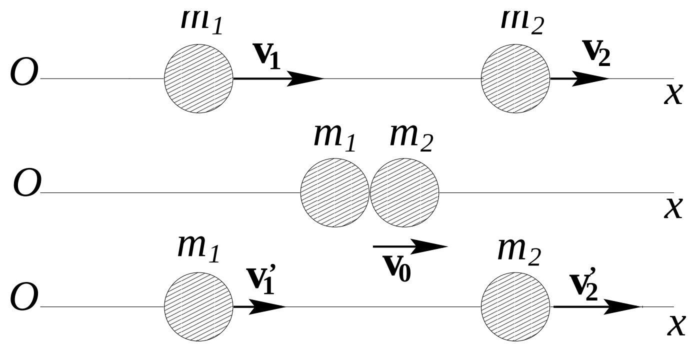


Figura 4.5: Colisão frontal de duas partículas.

A fim de calcular as velocidades após a colisão, devemos usar a Equação (4.32), juntamente com a equação do balanço energético (4.31).

É conveniente, em problemas deste tipo, introduzir-se o parâmetro ϵ conhecido por coeficiente de restituição. Esta quantidade é definida como a razão entre a velocidade de separação V' e a velocidade de aproximação V. Em nossa notação ϵ deve ser escrito como

$$\epsilon = \frac{|v_2' - v_1'|}{|v_2 - v_1|} = \frac{V'}{V} \tag{4.33}$$

O valor numérico de ϵ depende primariamente da composição e constituição física dos dois corpos. É fácil verificar que em uma colisão perfeitamente elástica $\epsilon = 1$. Para tanto, devemos fazer $Q = 0$ em (4.31) e resolver o sistema formado pelas Equações (4.31) e (4.32).

Em uma colisão perfeitamente inelástica, os dois corpos permanecem unidos após a colisão de modo que $\epsilon = 0$. Para muitas situações o valor de ϵ situa-se entre os dois extremos (entre 0 e 1). Para a colisão entre duas bolas de bilhar ϵ vale aproximadamente 0,95. O valor desse coeficiente depende também da velocidade com que os corpos se aproximam.

Podemos calcular os valores das velocidades finais com o uso da Equação (4.32), juntamente com a definição do coeficiente de restituição, Equação (4.33). O resultado é

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - \epsilon m_2)v_1 + (m_2 + \epsilon m_2)v_2}{m_1 + m_2} \\ v_2' &= \frac{(m_1 + \epsilon m_1)v_1 + (m_2 - \epsilon m_1)v_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{4.34}$$

No caso inelástico ($\epsilon = 0$) verifica-se que $v_1' = v_2'$, isto é, não há recuo relativo. Por outro lado, no caso especial em que os dois corpos possuem massas iguais, $m_1 = m_2$, e a colisão é perfeitamente elástica, $\epsilon = 1$, obtemos

$$v_1' = v_2$$

$$v_2' = v_1$$

os dois corpos trocam suas velocidades como resultado da colisão.

No caso geral de colisões frontais não elásticas, é facil verificar que a perda de energia Q é relacionada com o coeficiente de restituição pela equação

$$Q = \frac{1}{2}\mu v^2(1 - \epsilon^2)$$

onde μ é a massa reduzida e v a velocidade relativa antes da colisão. A dedução desta expressão é deixada como exercício.

4.6 Colisão Oblíqua e Espalhamento. Comparação das Coordenadas do Laboratório e do Centro de Massa

Vamos voltar nossa atenção para um caso de colisão mais geral do que aquele em que o movimento está confinado a uma linha reta. Aqui a notação vetorial para as equações do momentum (4.28) e (4.29) tem que ser mantida.

Vamos estudar o caso especial de uma partícula de massa m_1 com velocidade inicial $\vec{v}_1$ (partícula incidente) que colide com a partícula de massa m_2 inicialmente em repouso (partícula alvo). Este é o problema típico que encontramos em física nuclear. As equações do momentum são

$$\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \tag{4.35}$$

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2 \tag{4.36}$$

O balanço de energia é dado por

$$\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p'^2_1}{m_1} + \frac{p'^2_2}{m_2} + Q \tag{4.37}$$

ou

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2 + Q \tag{4.38}$$

Aqui, como antes, as linhas indicam velocidades e momenta finais. A quantidade Q é de fundamental importância em física atômica e nuclear uma vez que ela representa a energia emitida ou perdida em uma colisão atômica ou nuclear. Em muitos casos a partícula alvo é "quebrada" (fissão) ou se modifica por influência da colisão. Em tais casos as partículas, após a colisão, são diferentes das partículas antes da colisão. Em tais casos deve-se, logicamente, assinalar de modo diferente as massas após a colisão com m_3 e m_4, por exemplo.

Mas, qualquer que seja o caso, a lei de conservação do momentum tem que ser verificada. De acordo com a teoria da relatividade, no entanto, a massa da partícula varia com a velocidade de um modo que é descrito por esta teoria, e tal fato deve ser tomado em consideração quando tratamos colisões envolvendo velocidades próximas à da luz. No entanto, podemos adiantar que a conservação do momentum expressa pela Equação (4.28) é relativisticamente correta, considerando que a massa seja uma função da velocidade.

Coordenadas do Centro de Massa

Cálculos teóricos em física nuclear são feitos comumente em termos de quantidades relacionadas a um sistema de coordenadas no qual o centro de massa das partículas que colidem esteja parado. Por outro lado, as observações experimentais do espalhamento das partículas são feitas em termos das coordenadas de laboratório. Há portanto o interesse de se fazer considerações breves à respeito do problema de conversão de um sistema de coordenadas para o outro.

Os vetores velocidade no sistema do laboratório e no sistema do centro de massa estão representados na Figura 4.6. Nessa Figura ϕ_1 é o ângulo de deflexão da partícula incidente, depois que ela atingiu o alvo e ϕ_2 é o ângulo que a direção do movimento do alvo faz com a direção original do movimento da partícula incidente. Tanto ϕ_1 quanto ϕ_2 são medidos no sistema do laboratório. No sistema do centro de massa, uma vez que o centro de massa deve permanecer sobre a linha que une as duas partículas, ambas as partículas aproximam-se do centro de massa, colidem e afastam-se do mesmo, em sentidos opostos. O ângulo θ é o ângulo de deflexão da partícula incidente em relação à direção original de movimento, medido no sistema do centro de massa.

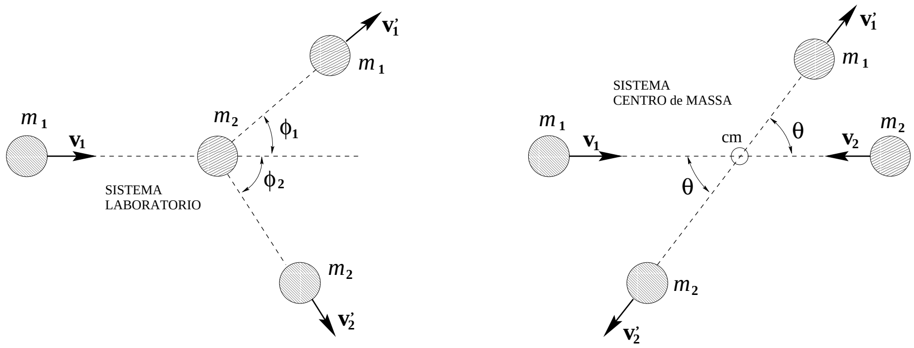


Figura 4.6: Comparação das coordenadas do Laboratório e do Centro de Massa.

Da definição de centro de massa, vemos que o momentum linear do conjunto no referencial do centro de massa é nulo tanto antes quanto depois da colisão. Desta forma, podemos escrever

$$\overline{\vec{p}}_1 + \overline{\vec{p}}_2 = 0 \tag{4.39}$$

$$\overline{\vec{p}'}_1 + \overline{\vec{p}'}_2 = 0 \tag{4.40}$$

As barras são usadas para indicar que a quantidade em questão se refere ao sistema do centro de massa. O balanço energético corresponde a

$$\frac{\overline{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\overline{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\overline{p'}_1^2}{2m_1} + \frac{\overline{p'}_2^2}{2m_2} + Q \tag{4.41}$$

Podemos eliminar $\overline{p}_2$ e $\overline{p'}_2$ da última equação recorrendo às Equações (4.39) e (4.40). Desta forma, a Equação (4.41) pode ser escrita como

$$\frac{\overline{p}_1^2}{2\mu} = \frac{\overline{p'}_1^2}{2\mu} + Q \tag{4.42}$$

As expressões (4.39) e (4.40) podem ser escritas como

$$m_1\overline{\vec{v}}_1 + m_2\overline{\vec{v}}_2 = 0 \tag{4.43}$$

$$m_1\overline{\vec{v}'}_1 + m_2\overline{\vec{v}'}_2 = 0 \tag{4.44}$$

A velocidade do centro de massa é

$$\vec{v}_{cm} = \frac{m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{4.45}$$

então temos

$$\overline{\vec{v}}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_{cm} = \frac{m_2\vec{v}_1}{m_1 + m_2} \tag{4.46}$$

A relação entre os vetores velocidade $\vec{v}_{cm}$, $\vec{v}'_1$ e $\overline{\vec{v}'}_1$ é mostrada na Figura 4.7. Dela, vemos que

$$v'_1 \operatorname{sen}\phi_1 = \overline{v}'_1 \operatorname{sen}\theta \tag{4.47}$$

$$v'_1 \cos\phi_1 = \overline{v}'_1 \cos\theta + v_{cm} \tag{4.48}$$

Dividindo (4.47) por (4.48) encontramos uma equação que conecta os ângulos de espalhamento nos dois sistemas

$$\operatorname{tg}\phi_1 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\gamma + \cos\theta} \tag{4.49}$$

onde γ é um parâmetro numérico dado por

$$\gamma = \frac{v_{cm}}{\overline{v}_1'} = \frac{m_1 v_1}{\overline{v}_1'(m_1 + m_2)} \tag{4.50}$$

a última passagem vem da Equação (4.45).

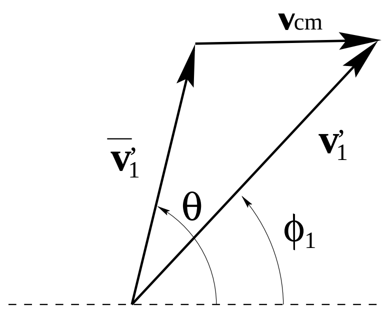


Figura 4.7: Relação entre os vetores velocidade no sistema Laboratório e no sistema Centro de Massa.

Podemos agora calcular o valor de $\overline{v}_1'$ em termos da velocidade da partícula incidente a partir da Equação (4.42). Esta equação nos dá as informações necessárias para encontrarmos γ e então determinarmos a relação entre os ângulos de espalhamento. Por exemplo, no caso de uma colisão perfeitamente elástica, $Q = 0$, encontramos — de (4.42) — que $\overline{p}_1 = \overline{p}_1'$ ou $\overline{v}_1 = \overline{v}_1'$ e este resultado junto com a Equação (4.46) nos leva ao resultado

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2} \tag{4.51}$$

para a colisão elástica.

Dois casos especiais para as colisões elásticas merecem ser considerados. Primeiro, se a massa m_2 da partícula alvo é muito maior do que a massa m_1 da partícula incidente. Neste caso γ é muito pequeno e $\operatorname{tg}\phi_1 \approx \operatorname{tg}\theta$ ou $\phi_1 \approx \theta$. Isto significa que o ângulo de espalhamento visto no referencial do laboratório ou no referencial do centro de massa são praticamente iguais.

O segundo caso especial é o de massas iguais ($m_1 = m_2$). Neste caso $\gamma = 1$ e a relação de espalhamento se reduz a

$$\operatorname{tg}\phi_1 = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 + \cos\theta} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

$$\phi_1 = \frac{\theta}{2}$$

que significa que o ângulo de deflexão medido no referencial do laboratório é exatamente a metade daquele medido no referencial do centro de massa. Além disto, uma vez que o ângulo

de deflexão da partícula alvo é $\pi-\theta$ no referencial do centro de massa, como mostra a Figura (4.6), temos que o mesmo ângulo medido no referencial do laboratório é $(\pi-\theta)/2$. Deste modo as duas partículas deixam o ponto de impacto em direções perpendiculares quando observadas no sistema do laboratório.

No caso geral de colisões não elásticas, deixa-se como um problema a demonstração de que γ pode ser expresso como

$$\gamma = \frac{m_1}{m_2}\left[1-\frac{Q}{T}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{4.52}$$

em que T é a energia cinética da partícula incidente, medida no referencial do laboratório.

4.7 Impulso em Colisões

Forças de duração temporal extremamente curta, tais como as exercidas por corpos que colidem, são denominadas forças impulsivas. Se concentramos nossa atenção em um dos corpos, a equação diferencial do movimento como sabemos é

$$\frac{d(m\vec{\mathrm{v}})}{dt} = \vec{\mathrm{F}} \tag{4.53}$$

ou na forma diferencial

$$d(m\vec{\mathrm{v}}) = \vec{\mathrm{F}}dt \tag{4.54}$$

integrando de $t=t_1$ até $t=t_2$ que é o intervalo de tempo durante o qual a força atuou, teremos

$$\Delta(m\vec{\mathrm{v}}) = \int_{t_1}^{t_2}\vec{\mathrm{F}}dt \tag{4.55}$$

A integral temporal da força é denominada *impulso*, e é denotada pelo símbolo $\hat{p}$. Desta forma, a equação acima pode ainda ser escrita como

$$\Delta(m\vec{\mathrm{v}}) = \hat{\mathrm{p}} \tag{4.56}$$

Em palavras temos: A variação no momentum linear de um corpo sujeito a uma força impulsiva é igual ao impulso desta força.

Podemos imaginar um impulso ideal produzido por uma força que tende para infinito com duração que tende para zero de modo que a integral $\int\vec{\mathrm{F}}dt$ seja finita. Tal impulso ideal produziria uma mudança instantânea do momentum e da velocidade do corpo sem produzir qualquer deslocamento.

Relação entre Impulso e o Coeficiente de Restituição

Apliquemos o conceito de impulso ao caso de uma colisão frontal de dois corpos esféricos (tratados na Seção 4.5). Iremos dividir o impulso em duas partes denominadas impulsos de compressão $\hat{\mathrm{p}}_c$ e impulso de restituição $\hat{\mathrm{p}}_r$. Vamos considerar apenas as componentes ao longo da direção que une os centros das esferas. Podemos escrever, para $\hat{\mathrm{p}}_c$

$$m_1v_0 - m_1v_1 = \hat{\mathrm{p}}_c \tag{4.57}$$

$$m_2v_0 - m_2v_2 = -\hat{\mathrm{p}}_c \tag{4.58}$$

onde v_0 é a velocidade comum das duas esferas no instante em que a velocidade relativa é zero. Similarmente, para a restituição temos

$$m_1 v'_1 - m_1 v_0 = \hat{\mathrm{p}}_r \tag{4.59}$$

$$m_2 v'_2 - m_2 v_0 = -\hat{\mathrm{p}}_r \tag{4.60}$$

eliminando v_0 das Equações (4.57) e (4.58) e também das Equações (4.59) e (4.60) obtemos o par de equações

$$m_1 m_2 (v_2 - v_1) = \hat{\mathrm{p}}_c (m_1 + m_2)$$

$$m_1 m_2 (v'_1 - v'_2) = \hat{\mathrm{p}}_r (m_1 + m_2)$$

Dividindo a segunda equação pela primeira temos

$$\frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} = \frac{\hat{\mathrm{p}}_r}{\hat{\mathrm{p}}_c} \tag{4.61}$$

mas o termo à esquerda é justamente a definição do coeficiente de restituição de modo que

$$\epsilon = \frac{\hat{\mathrm{p}}_r}{\hat{\mathrm{p}}_c} \tag{4.62}$$

O coeficiente de restituição é portanto igual a razão entre o impulso de restituição e o impulso de compressão.

4.8 Movimento de um Corpo com Massa Variável — Movimento de um Foguete

No caso de um corpo cuja massa varia com o tempo, é necessário um certo cuidado ao lidar com as equações diferenciais do movimento, o conceito de impulso é bastante útil neste tipo de problema.

Considere o caso geral do movimento de um corpo com massa variável. Seja $\vec{\mathrm{F}}_{ext}$ a força externa que age no corpo em um dado instante e seja Δm a variação de massa ocorrida no corpo em um curto intervalo de tempo Δt. Então, $\vec{\mathrm{F}}_{ext}\Delta t$ é o impulso devido à força externa e então temos

$$\vec{\mathrm{F}}_{ext}\Delta t = (\vec{\mathrm{p}}_{total})_{t+\Delta t} - (\vec{\mathrm{p}}_{total})_t$$

para a variação total no momentum de um sistema naquele intervalo Δt. Se denotarmos por $\vec{\mathrm{v}}$ a velocidade do corpo e por $\vec{\mathrm{u}}$ a velocidade de Δm relativa ao corpo, podemos então escrever

$$\vec{\mathrm{F}}_{ext}\Delta t = (m + \Delta m)(\vec{\mathrm{v}} + \Delta\vec{\mathrm{v}}) - [m\vec{\mathrm{v}} + \Delta m(\vec{\mathrm{v}} + \vec{\mathrm{u}})]$$

que reduz a

$$\vec{\mathrm{F}}_{ext}\Delta t = m\Delta\vec{\mathrm{v}} + \Delta m\Delta\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{u}}\Delta m$$

ou, dividindo por Δt

$$\vec{\mathrm{F}}_{ext} = (m + \Delta m)\frac{\Delta\vec{\mathrm{v}}}{\Delta t} - \frac{\vec{\mathrm{u}}\Delta m}{\Delta t}$$

e no caso limite, quando Δt tende para zero, temos

$$\vec{F}_{ext} = m\dot{\vec{v}} - \vec{u}\dot{m} \tag{4.63}$$

Aqui a força externa pode representar a força da gravidade ou de resistência do ar ou outra qualquer. No caso dos foguetes o termo $\vec{u}\dot{m}$ representa a propulsão.

Vamos aplicar a Equação acima a dois casos especiais. Primeiro, suponha que um corpo esteja se movendo em meio à neblina de modo que colete massa à medida que se move. Neste caso a velocidade inicial da matéria coletada é zero e $\vec{u} = -\vec{v}$ logo temos

$$\vec{F}_{ext} = m\dot{\vec{v}} + \vec{v}\dot{m} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \tag{4.64}$$

para a equação do movimento: ela se aplica somente se a velocidade inicial da massa que está sendo recolhida é zero. Em outro caso, a expressão da Equação (4.63) tem que ser usada.

No segundo caso especial, consideremos o movimento de um foguete. Para tal $\dot{m}$ é negativo por causa da perda de massa na forma de combustível ejetado. Assim $\vec{u}\dot{m}$ é oposto à direção de $\vec{u}$ (velocidade relativa do combustível ejetado). Para simplificar, podemos resolver a equação do movimento para o caso em que a força externa é zero. Temos assim

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{u}\dot{m} \tag{4.65}$$

separando as variáveis e integrando teremos

$$\int d\vec{v} = \int \frac{\vec{u}dm}{m}$$

considerando $\vec{u}$ constante temos

$$\int_{v_0}^{v} dv = -u \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$$

$$v = v_0 + u \ln \frac{m_0}{m}$$

aqui m_0 é a massa inicial do foguete (carga + combustível não queimado), m é a massa do mesmo sistema no instante t e u é a velocidade do combustível ejetado relativa ao foguete. Devido à função logarítimica, é necessário que se tenha uma considerável razão entre a massa do combustível e a carcaça para que se alcance as altas velocidades necessárias para a colocação de um satélite em órbita.

Exercícios de Treinamento

4.1 Um sistema é constituído de três partículas, cada uma de massa unitária, com posições e velocidades instantâneas dadas por

$$\vec{r}_1 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} \qquad \vec{v}_1 = -\vec{\imath}$$
$$\vec{r}_2 = \vec{\imath} + \vec{k} \qquad \vec{v}_2 = 2\vec{\jmath}$$
$$\vec{r}_3 = \vec{k} \qquad \vec{v}_3 = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$$

Calcule as seguintes grandezas

a) A posição instantânea do centro de massa.

b) A velocidade do centro de massa.

c) O momentum linear do sistema.

d) O momentum angular do sistema em relação à origem.

e) A energia cinética.

4.2 Um revolver de massa m dispara uma bala de massa γm onde γ é uma pequena fração. Se v_0 é a velocidade da bala quando ela abandona o cano do revólver, qual é a velocidade de recuo do revólver?

Problemas

4.3 Um bloco de madeira de massa m repousa sobre uma superfície horizontal. Uma bala de massa γm é disparada horizontalmente com velocidade v_0 contra o bloco, alojando-se no mesmo. Que fração da energia cinética inicial da bala é perdida no bloco, imediatamente após o impacto? Se μ é o coeficiente de atrito entre o bloco e o chão, que distância ele percorrerá até parar?

4.4 Uma granada é lançada com velocidade inicial v_0 segundo um ângulo de 45°. Na parte mais alta da trajetória ela explode, dividindo-se em dois fragmentos de mesma massa, um dos quais move-se verticalmente para baixo com velocidade inicial $\sqrt{2}v_0$. Qual a direção e velocidade do outro fragmento após a explosão?

4.5 Três partículas de mesma massa movem-se sobre uma mesma linha reta. Inicialmente elas passam pelas posições -1; 0 e $+1$ com velocidades $4v_0$; $2v_0$ e v_0. Encontre as velocidades finais das partículas, considerando que todos os choques são perfeitamente elásticos.

4.6 Uma bola cai de uma altura h chocando-se com um solo horizontal. Se o coeficiente de restituição é ϵ, mostre que a distância vertical total percorrida pela bola até que os repiques cessem é

$$\frac{h(1+\epsilon^2)}{1-\epsilon^2}$$

e encontre o tempo total gasto até que a bola pare.

4.7 Considere a Terra e a Lua como um sistema isolado e mostre que cada uma descreve uma elipse em relação ao centro de massa do sistema.

4.8 Mostre que a energia cinética de um sistema de duas partículas é

$$\frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2$$

onde $m = m_1 + m_2$, v é a velocidade relativa e μ é a massa reduzida.

4.9 Se dois corpos colidem frontalmente, mostre que a perda de energia cinética é igual a $\mu v^2(1-\epsilon^2)/2$ onde μ = massa reduzida; v = velocidade relativa antes do impacto e ϵ = coeficiente de restituição.

4.10 Uma partícula móvel de massa m_1 colide elasticamente com um alvo de massa m_2 inicialmente em repouso. Se a colisão for frontal, mostre que a partícula incidente perde uma fração $4\mu/m$ de sua energia cinética inicial (μ = massa reduzida; $m = m_1 + m_2$).

4.11 Mostre que o momentum angular de um sistema de duas partículas é

$$\vec{\mathrm{r}}_{cm} \times m\vec{\mathrm{V}}_{cm} + \vec{\mathrm{R}} \times \mu\vec{\mathrm{v}}$$

($m = m_1+m_2$; μ = massa reduzida; $\vec{\mathrm{R}}$ = vetor posição relativa; $\vec{\mathrm{v}}$ = velocidade relativa das duas partículas).

4.12 Um próton de massa m_p com velocidade inicial $\vec{\mathrm{v}}$ colide com um átomo de hélio, massa $4m_p$, inicialmente em repouso. Se o próton deixa o ponto de impacto segundo um ângulo de 45° em relação à direção original de seu movimento, encontre as velocidades finais de cada uma das partículas. Considere a colisão perfeitamente elástica.

4.13 Resolva o problema acima no caso de uma colisão inelástica em que $Q = 1/4$ da energia cinética inicial do próton.

4.14 Relativo ao problema 4.12, encontre o ângulo de espalhamento do próton no referencial do centro de massa.

4.15 Relativo ao problema 4.13, encontre o ângulo de espalhamento do proton no referencial do centro de massa.

4.16 Uma partícula de massa m com momentum inicial p_1, colide com uma partícula de igual massa em repouso. Se o módulo dos momenta finais das duas partículas são p'_1 e p'_2 respectivamente, mostre que a perda de energia na colisão é dada por

$$Q = \frac{p'_1 p'_2}{m} cos\psi$$

onde ψ é o ângulo entre as trajetórias das duas partículas após a colisão.

4.17 Encontre a equação do movimento de um foguete disparado verticalmente para cima considerando g constante. Encontre a razão entre a massa de combustível e a da carcaça para que o foguete alcance uma velocidade final igual a velocidade de escape da Terra (v_e), considerando-se que a velocidade de exaustão do gás é Kv_e (K = constante) e a taxa de exaustão é $\dot{m}$. Determine o valor numérico da relação combustível-carcaça para o caso em que $K = 1/4$, e $\dot{m}$ é igual a 1% da massa inicial de combustível por segundo.

4.18 Monte a equação diferencial do movimento de uma gota de chuva que cai em meio à neblina; recolhendo mais água enquanto cai. Considere que a gota permanece esférica e que a taxa de recolhimento de água é proporcional à área da seção transversal da gota multiplicada pela velocidade da mesma. Mostre que, se a gota parte do repouso com tamanho inicial infinitesimal então a aceleração é constante e igual a $g/7$.

4.19 Uma corrente de massa uniformemente distribuída e de comprimento a repousa inicialmente sobre uma mesa. Uma parte b de seu comprimento pende de uma das bordas da mesa enquanto a outra parte, de comprimento $a - b$ repousa sobre a tábua da mesa. Se a corrente é abandonada, mostre que a velocidade da mesma, quando o último elo abandona a mesa, é $\sqrt{2g(a^3 - b^3)/3a^2}$.

4.20 Um foguete, ao viajar na atmosfera, experimenta uma força de resistência linear do ar $-K\vec{v}$. Encontre a equação diferencial do movimento quando todas as outras forças externas são desprezíveis. Integre a equação e mostre que se o foguete parte do repouso, a velocidade final é dada por $v = V\alpha[1 - (m/m_0)^{1/\alpha}]$ onde V é a velocidade relativa de exaustão dos gases, $\alpha = |\dot{m}/K| =$ constante, m_0 é a massa inicial do foguete mais combustível e m é a massa final do foguete.

Respostas de Problemas Selecionados

4.1 (a) $(2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k})/3$
(c) $3\vec{\jmath} + \vec{k}$
(d) $-3\vec{\imath} + 3\vec{k}$

4.3 Fração perdida $= (1+\gamma)^{-1}$, $s = \frac{v_0^2\gamma^2}{2g\mu(1+\gamma)^2}$

4.5 v_0; $2v_0$; $4v_0$

4.12 Proton: $v'_x \approx v'_y \approx 0,66v$
Hélio: $v'_x \approx 0,09v$, $v'_y \approx 0,16v$

4.14 $\approx 55°$

4.18 $\ddot{z} = g - 3\dot{z}^2/z$

4.20 $m\dot{v} + V\dot{m} + Kv = 0$

Capítulo 5

Mecânica dos Corpos Rígidos Movimento no Plano

Um corpo rígido pode ser considerado como um sistema de partículas cujas posições relativas são fixas, ou, em outras palavras, em que a distância entre duas partículas quaisquer é constante. Esta é a definição de um corpo rígido ideal. Primeiramente, como já foi mencionado na definição de uma partícula, não existem verdadeiras partículas na natureza. Em segundo lugar, os corpos reais não são estritamente rígidos; eles podem ser deformados (esticados, comprimidos ou curvados) quando submetidos a forças externas. No entanto, por enquanto, iremos desprezar tais deformações.

5.1 Centro de Massa de um Corpo Rígido

Já definimos na Seção 4.1 o centro de massa de um sistema de partículas como sendo o ponto (x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}), tal que

$$x_{cm} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}, \qquad y_{cm} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}, \qquad z_{cm} = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i} \tag{4.1}$$

Para um corpo rígido extenso, podemos substituir a somatória por uma integral sobre todo o volume do corpo de modo que

$$x_{cm} = \frac{\int_v \rho x dv}{\int_v \rho dv}, \qquad y_{cm} = \frac{\int_v \rho y dv}{\int_v \rho dv}, \qquad z_{cm} = \frac{\int_v \rho z dv}{\int_v \rho dv} \tag{5.1}$$

onde ρ é a densidade e dv o elemento de volume. Se o corpo rígido tem a forma de uma casca fina, as equações para o centro de massa passam a ser

$$x_{cm} = \frac{\int_s \rho x ds}{\int_s \rho ds}, \qquad y_{cm} = \frac{\int_s \rho y ds}{\int_s \rho ds}, \qquad z_{cm} = \frac{\int_s \rho z ds}{\int_s \rho ds} \tag{5.2}$$

onde ds é o elemento de área e ρ, a densidade superficial; a integral se estende sobre toda a superfície do corpo.

Analogamente, se o corpo tem a forma de um fio fino, temos

$$x_{cm} = \frac{\int_L \rho x dl}{\int_L \rho dl}, \qquad y_{cm} = \frac{\int_L \rho y dl}{\int_L \rho dl}, \qquad z_{cm} = \frac{\int_L \rho z dl}{\int_L \rho dl} \tag{5.3}$$

Neste caso ρ é a densidade linear e dl o elemento de comprimento.

Para corpos homogêneos e uniformes, os fatores densidade (ρ) são constantes em cada caso, e portanto podem ser cancelados em todas as equações acima.

Se o corpo é composto, isto é se ele é constituido de duas ou mais partes cujos centros de massa são conhecidos, então, é claro, da definição do centro de massa que podemos escrever

$$x_{cm} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots} \tag{5.4}$$

Equações semelhantes fornecem y_{cm} e z_{cm}. Aqui (x_1, y_1, z_1) são as coordenadas do centro de massa do constituinte de massa m_1, etc.

Considerações de Simetria

Se o corpo possui alguma simetria, pode-se tirar vantagem dessa simetria para a localização do centro de massa. Deste modo, se o corpo possui um plano de simetria, isto é, se cada partícula m_i possui uma imagem especular m'_i relativa a um certo plano, então o centro de massa encontra-se neste plano. Para provar isto, suponhamos que o plano xy é um plano de simetria. Teremos então

$$z_{cm} = \frac{\sum(z_i m_i + z'_i m'_i)}{\sum(m_i + m'_i)}$$

mas $m_i = m'_i$ e $z_i = -z'_i$. Então os termos no numerador cancelam-se em pares e $z_{cm} = 0$; ou seja o centro de massa encontra-se no plano xy.

De modo análogo, se o corpo possui uma linha de simetria, é fácil mostrar que o centro de massa é um ponto dessa linha. A prova disto fica como exercício.

Hemisfério Sólido

Para encontrar o centro de massa de um hemisfério sólido homogêneo de raio a, nós sabemos que, por razões de simetria, o centro de massa encontra-se sobre o raio normal à superfície plana do hemisfério.

Fixamos os eixos coordenados como mostra a Figura 5.1. Temos que o centro de massa está sobre o eixo z. Para calcular z_{cm} usaremos elementos de volume circulares de espessura dz e raio $\sqrt{a^2 - z^2}$ como mostrado. Então

$$dv = \pi(a^2 - z^2)dz$$

de modo que

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho\pi z(a^2 - z^2)dz}{\int_0^a \rho\pi(a^2 - z^2)dz} = \frac{3}{8}a \tag{5.5}$$

Casca Hemisférica

Para uma casca hemisférica de raio a usamos os mesmos eixos do problema anterior (Fig. 5.1). Novamente, pela simetria, o centro de massa está localizado sobre o eixo z. Para elemento de superfície tomamos uma tira circular de largura $ad\theta$. Podemos escrever

$$ds = 2\pi\sqrt{a^2 - z^2}ad\theta$$

mas $\theta = \text{arcsen}\,(z/a)$ de modo que

$$d\theta = (a^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz$$

e portanto $ds = 2\pi a dz$, logo

$$z_{cm} = \frac{\int_0^a \rho 2\pi a z dz}{\int_0^a \rho 2\pi a dz} = \frac{a}{2} \tag{5.6}$$

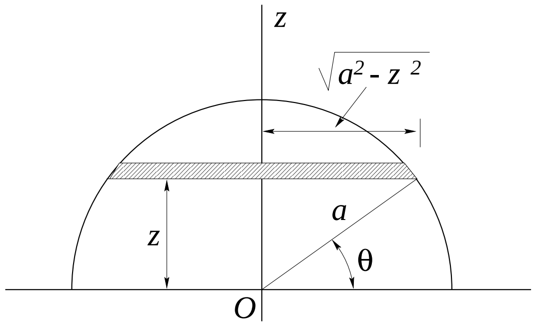


Figura 5.1: Coordenadas para o cálculo do centro de massa de um hemisfério.

Aro Semicircular

Para encontrarmos o centro de massa de um aro semicircular de raio a, usamos os eixos mostrados na Figura 5.2. Temos

$$dl = a d\theta$$

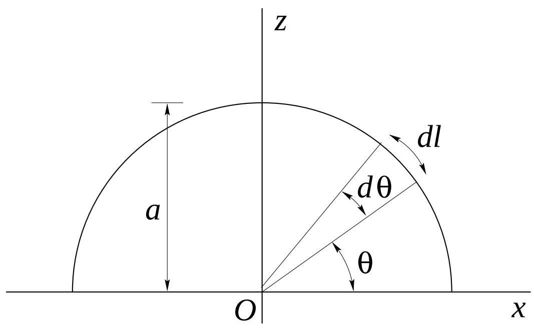


Figura 5.2: Coordenadas para o cálculo do centro de massa de um aro semicircular.

e $z = a \,\text{sen}\,\theta$ logo

$$z_{cm} = \frac{\int_0^\pi \rho (a \,\text{sen}\,\theta) a d\theta}{\int_0^\pi \rho a d\theta} = \frac{2a}{\pi} \tag{5.7}$$

Lâmina Semicircular

No caso de uma lâmina semicircular uniforme, o centro de massa está sobre o eixo z (Fig. 5.2). Deixamos como problema a prova de que

$$z_{cm} = \frac{4a}{3\pi} \tag{5.8}$$

5.2 Alguns Teoremas sobre o Equilíbrio Estático de um Corpo Rígido

Como já foi visto (Seção 4.1), a aceleração do centro de massa de um sistema é igual à soma vetorial das forças externas dividida pela massa. Em particular, se o sistema é um corpo rígido e se a soma de todas as forças externas é nula

$$\vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2 + \ldots = 0 \tag{5.9}$$

então o centro de massa, se estiver inicialmente em repouso, permanecerá parado. Desta forma a Equação (5.9) expressa a condição de equilíbrio translacional de um corpo rígido. Analogamente, o anulamento do torque

$$\vec{\mathrm{r}}_1 \times \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{r}}_2 \times \vec{\mathrm{F}}_2 + \ldots = 0 \tag{5.10}$$

significa que o momentum angular total do corpo não varia (Seção 4.2). Esta é a condição de equilíbrio rotacional do corpo rígido que implica no fato de se o corpo estiver inicialmente em repouso, não comece a girar. As Equações (5.9) e (5.10) juntas constituem as condições necessárias para o equilíbrio completo de um corpo rígido.

Equilíbrio em um Campo Gravitacional Uniforme

Consideremos um corpo rígido dentro de um campo gravitacional uniforme, digamos, na superfície da Terra. Uma vez que a soma das forças gravitacionais é $m\vec{\mathrm{g}}$ onde m é a massa do corpo, podemos escrever a condição para o equilíbrio translacional como

$$\vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2 + \ldots + m\vec{\mathrm{g}} = 0 \tag{5.11}$$

onde $\vec{\mathrm{F}}_1$, $\vec{\mathrm{F}}_2$, etc, são todas as forças externas além da força gravitacional. Analogamente, a condição de equilíbrio rotacional deve ser escrita como

$$\vec{\mathrm{r}}_1 \times \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{r}}_2 \times \vec{\mathrm{F}}_2 + \ldots + \sum_i \vec{\mathrm{r}}_i \times m_i\vec{\mathrm{g}} = 0 \tag{5.12}$$

mas $\vec{\mathrm{g}}$ é constante de modo que podemos escrever

$$\sum_i \vec{\mathrm{r}}_i \times m_i\vec{\mathrm{g}} = \left(\sum_i m_i\vec{\mathrm{r}}_i\right) \times \vec{\mathrm{g}} = m\vec{\mathrm{r}}_{cm} \times \vec{\mathrm{g}} = \vec{\mathrm{r}}_{cm} \times m\vec{\mathrm{g}} \tag{5.13}$$

A equação acima estabelece que o momento da força da gravidade sobre todos os pontos do corpo é igual ao momento de uma única força $m\vec{\mathrm{g}}$ atuando no centro de massa[1]. A

[1] O centro aparente de atuação da força gravitacional é denominado centro de gravidade. Em um campo gravitacional uniforme como o que estamos considerando, o centro de massa e o centro de gravidade são coincidentes.

equação para o equilíbrio rotacional pode ser então escrita como

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} = 0 \tag{5.14}$$

Equilíbrio sob Forças Coplanares

Se as linhas de ação de um conjunto de forças que atuam em um corpo rígido são coplanares, isto é, elas estão todas no mesmo plano, então podemos escrever $\vec{F}_1 = \vec{\imath} F_{x1} + \vec{\jmath} F_{y1}$, etc.

As equações para o equilíbrio na forma de componentes, Equações (5.9) e (5.10), (que o estudante deve lembrar da Física Elementar) são então (equilíbrio translacional)

$$F_{x1} + F_{x2} + \ldots = 0 \qquad \text{e} \qquad F_{y1} + F_{y2} + \ldots = 0 \tag{5.15}$$

(equilíbrio rotacional)

$$x_1 F_{y1} - y_1 F_{x1} + x_2 F_{y2} - y_2 F_{x2} + \ldots = 0 \tag{5.16}$$

5.3 Rotação de um Corpo Rígido em Torno de um Eixo Fixo — Momento de Inércia

O tipo mais simples de movimento de um corpo rígido, além da translação pura, é aquele no qual o corpo está obrigado a girar em torno de um eixo fixo. Tomemos o eixo z de um sistema de coordenadas apropriado como eixo de rotação.

A trajetória descrita por uma partícula m_i localizada no ponto (x_i, y_i, z_i) é um círculo de raio $\sqrt{x_i^2 + y_i^2} = R_i$ centrado no eixo z. Uma seção transversal paralela ao plano xy é mostrada na Figura 5.3.

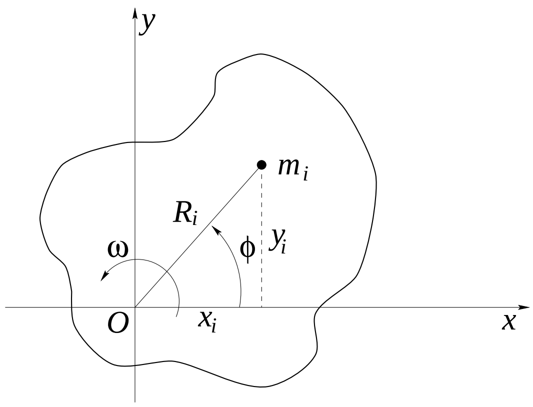


Figura 5.3: Seção transversal de um corpo rígido girando em torno do eixo z.

A velocidade v_i da partícula i é dada por

$$v_i = R_i \omega = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}\,\omega \tag{5.17}$$

onde ω é a velocidade angular da rotação. Analisando a figura vemos que a velocidade tem as seguintes componentes

$$\dot{x}_i = -v_i \operatorname{sen}\phi = -\omega y_i \tag{5.18}$$

$$\dot{y}_i = v_i \cos\phi = \omega x_i \tag{5.19}$$

$$\dot{z}_i = 0 \tag{5.20}$$

onde ϕ é definido como mostra a figura. As equações acima também podem ser obtidas ao se tomar as componentes de

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{r}}_i \tag{5.21}$$

onde $\vec{\omega} = \vec{\mathrm{k}}\,\omega$.

Calculemos a energia cinética de rotação do corpo. Temos

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{5.22}$$

onde

$$I = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) \tag{5.23}$$

A quantidade I, definida pela equação acima, é de particular importância no estudo de corpos rígidos. Ela é denominada **momento de inércia**.

Para mostrar como o momento de inércia é importante, calculemos primeiramente o momentum angular em relação ao eixo de rotação.

Uma vez que o momentum angular de uma única partícula é definido como $\vec{\mathrm{r}}_i \times m_i \vec{\mathrm{v}}_i$, a componente z é

$$m_i(x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = m_i(x_i^2 + y_i^2)\omega = m_i R_i^2 \omega \tag{5.24}$$

onde fizemos uso das Equações (5.18) e (5.19). A componente z total do momentum angular, que vamos representar por L é então dada somando-se sobre todas as partículas

$$L = \sum_i m_i R_i^2 \omega = I\omega \tag{5.25}$$

Na Seção 4.2 vimos que a taxa de variação do momentum angular de qualquer sistema é igual ao momento total das forças externas.

Para um corpo obrigado a girar em torno de um eixo fixo, temos

$$N = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} \tag{5.26}$$

onde N é o momento total de todas as forças externas relativo ao eixo de rotação (componente de $\vec{\mathrm{N}}$ sobre o eixo). Se o corpo é rígido, temos que I é constante e podemos escrever

$$N = I\frac{d\omega}{dt} \tag{5.27}$$

A analogia entre as equações para translação e para rotação em torno de um eixo é mostrada a seguir

TRANSLAÇÃO		ROTAÇÃO	
momentum linear	$p = mv$	momentum angular	$L = I\omega$
força	$F = m\dot{v}$	torque	$N = I\dot{\omega}$
energia cinética	$T = \frac{1}{2}mv^2$	energia cinética	$T = \frac{1}{2}I\omega^2$

Desta forma, o momento de inércia é análogo à massa: ele é uma medida da inércia rotacional do corpo em relação a um dado eixo fixo de rotação, do mesmo modo como a massa é a medida da inércia translacional do corpo.

5.4 Cálculo do Momento de Inércia

Nos cálculos práticos do momento de inércia $\sum mR^2$, para corpos extensos, substituimos a somatória por uma integração por todo o corpo, do mesmo modo como fizemos para o cálculo do centro de massa. Desta forma podemos escrever

$$I = \int R^2 dm \tag{5.28}$$

onde dm, elemento de massa, é dado pelo fator densidade multiplicado por uma diferencial apropriada (volume, área ou comprimento). É importante lembrar que R é a distância perpendicular entre o elemento de massa e o eixo de rotação.

No caso de um corpo composto, é claro, da definição de momento de inércia, que podemos escrever

$$I = I_1 + I_2 + \dots \tag{5.29}$$

onde I_1, I_2, etc, são os momentos de inércia dos vários i constituintes, relativos ao eixo escolhido.

Calculemos o momento de inércia para alguns casos particulares importantes.

Barra Fina

Para uma barra fina uniforme de comprimento a e massa m, temos, para o eixo perpendicular à barra passando por uma extremidade (Figura 5.4 (a))

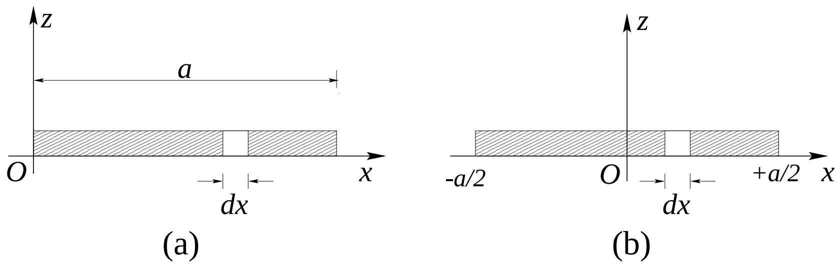


Figura 5.4: Coordenadas para o cálculo do momento de inércia de uma barra (a) em relação a uma extremidade (b) em relação ao centro.

$$I = \int_0^a x^2 \rho dx = \rho \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3} m a^2 \tag{5.30}$$

a última passagem resulta do fato de que $\rho a = m$.

Se o eixo é perpendicular à barra mas passa pelo seu centro (Fig. 5.4 (b)) temos

$$I = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2 \rho dx = \frac{1}{12} \rho a^3 = \frac{1}{12} m a^2 \tag{5.31}$$

Aro ou Casca Cilíndrica

No caso de um aro circular fino ou de uma casca cilíndrica, para o eixo central ou de simetria, todas as partículas se encontram à mesma distância do eixo de modo que

$$I = m a^2 \tag{5.32}$$

onde a é o raio e m a massa.

Disco Circular ou Cilindro

Para calcular o momento de inércia de um disco circular uniforme de raio a e massa m, vamos usar coordenadas polares. O elemento de massa, um aro fino de raio r e espessura dr é dado por

$$dm = \rho 2\pi r dr$$

onde ρ é a densidade superficial. O momento de inércia em relação ao eixo que passa pelo centro do disco, normal ao plano das faces (Figura 5.5) é obtido do seguinte modo

$$I = \int_0^a \rho (r^2)(2\pi r dr) = 2\pi\rho \frac{a^4}{4} = \frac{1}{2} m a^2 \tag{5.33}$$

A última passagem envolveu a relação $\pi a^2 \rho = m$.

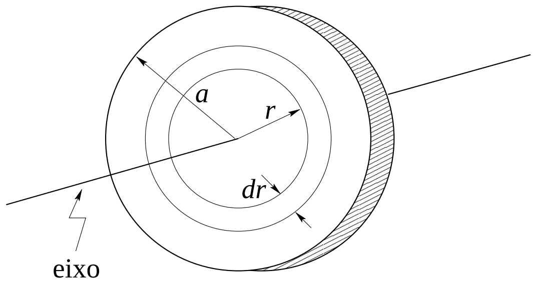


Figura 5.5: Coordenadas para o cálculo do momento de inércia de um disco.

Obviamente a Equação (5.33) também se aplica para um cilindro de raio a e massa m para o eixo central do mesmo.

Esfera

Encontremos o momento de inércia de uma esfera sólida uniforme de raio a e massa m relativo a um eixo (eixo z) passando por seu centro. Iremos dividir a esfera em discos circulares finos, como mostra a Figura 5.6.

O momento de inércia de um desses discos de raio y é dado pela Equação (5.33), $\frac{1}{2}y^2 dm$ mas $dm = \rho\pi y^2 dz$ de modo que

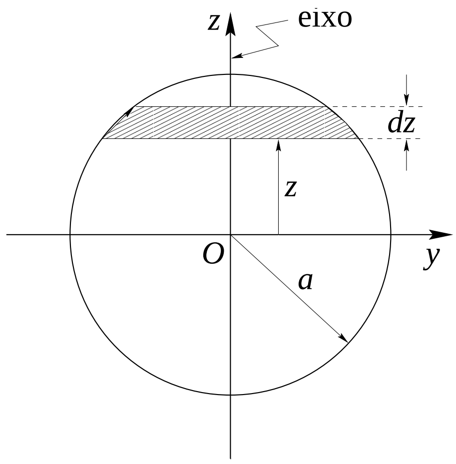


Figura 5.6: Coordenadas para o cálculo do momento de inércia de uma esfera em relação ao eixo z.

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\pi\rho y^4 dz = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2}\pi\rho(a^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15}\pi\rho a^5 \qquad (5.34)$$

A última passagem deve ser completada pelo leitor. Uma vez que $m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$ temos

$$I = \frac{2}{5}ma^2 \qquad (5.35)$$

Casca Esférica

O momento de inércia de uma casca esférica fina e uniforme pode ser obtido facilmente pela aplicação da Equação (5.34). Se diferenciamos em relação a a, temos

$$dI = \frac{8}{3}\pi\rho a^4 da$$

este resultado é o momento de inércia de uma casca de raio a e espessura da. A massa da casca é $4\pi a^2 \rho da$ de modo que

$$I = \frac{2}{3}ma^2 \tag{5.36}$$

para o momento de inércia de uma casca de massa m e raio a. O leitor pode também tentar obter este resultado por integração.

Teorema dos Eixos Perpendiculares

Considere um corpo rígido na forma de uma chapa plana e fina de formato qualquer. Coloquemos esta lâmina no plano xy (Figura 5.7). O momento de inércia relativo ao eixo z é dado por

$$I_z = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2$$

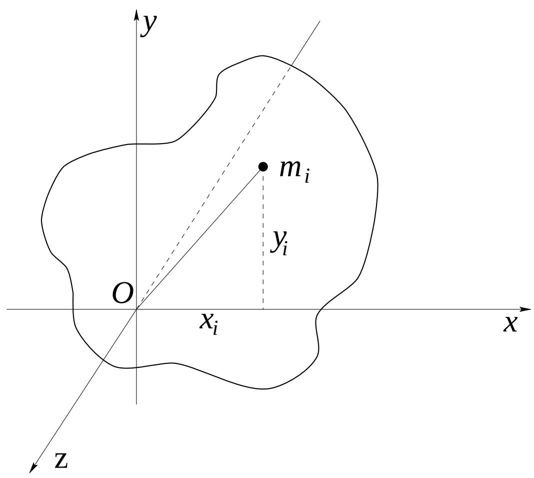


Figura 5.7: Teorema dos eixos perpendiculares.

Mas $\sum_i m_i x_i^2$ é exatamente o momento de inércia I_y desse corpo com relação ao eixo y pois z_i vale zero para todas as partículas.

Do mesmo modo, $\sum_i m_i y_i^2$ é o momento de inércia I_x desse corpo em relação ao eixo x e a equação acima pode ser escrita

$$I_z = I_x + I_y \tag{5.37}$$

Este é o teorema dos eixos perpendiculares. Em palavras: o momento de inércia de qualquer lâmina plana, relativo a qualquer eixo normal ao seu plano, é igual à soma dos

momentos de inércia relativos a dois eixos quaisquer mutuamente perpendiculares, contidos no plano da lâmina e que interceptam o primeiro eixo.

Como exemplo do uso deste teorema, vamos considerar um disco circular fino no plano xy (Figura 5.8). Da Equação (5.33) temos

$$I_z = \frac{1}{2}ma^2 = I_x + I_y$$

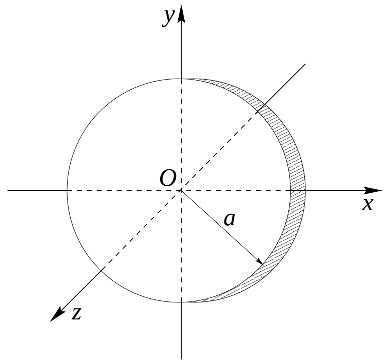


Figura 5.8: Disco circular fino no plano xy.

Neste caso, no entanto, sabemos por simetria que $I_x = I_y$. De modo que

$$I_x = I_y = \frac{1}{4}ma^2 \tag{5.38}$$

para o momento de inércia de um disco, relativo a um eixo contido no plano do disco e que passa pelo seu centro. A Equação (5.38) pode ser também obtida por integração direta.

Teorema dos Eixos Paralelos

Tomemos a equação do momento de inércia relativo a um eixo qualquer, por exemplo o eixo z

$$I = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

Agora podemos expressar x_i e y_i em termos das coordenadas do centro de massa $(x_{cm},\ y_{cm},\ z_{cm})$ e das coordenadas relativas do centro de massa $(\overline{x}_i,\ \overline{y}_i,\ \overline{z}_i)$ (Figura 5.9) da seguinte maneira

$$x_i = x_{cm} + \overline{x}_i \qquad \text{e} \qquad y_i = y_{cm} + \overline{y}_i \tag{5.39}$$

temos então, depois de substituições e rearranjos de termos

$$I = \sum_i m_i(\overline{x}_i^2 + \overline{y}_i^2) + \sum_i m_i(x_{cm}^2 + y_{cm}^2) + 2x_{cm}\sum_i m_i\overline{x}_i + 2y_{cm}\sum_i m_i\overline{y}_i \tag{5.40}$$

O primeiro termo à direita é o momento de inércia relativo a um eixo paralelo ao eixo z que passa pelo centro de massa. Vamos representá-lo por I_{cm}. A segunda soma à direita é igual

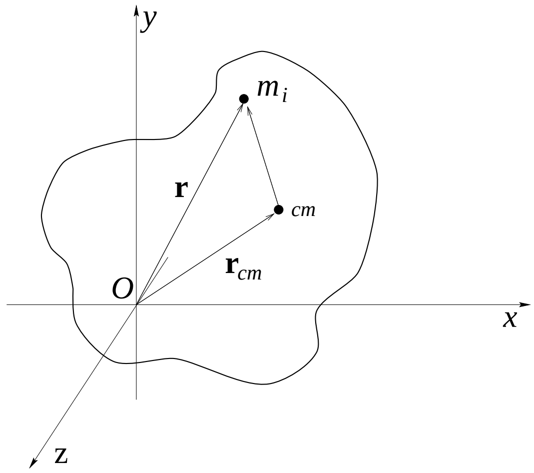


Figura 5.9: Teorema dos eixos paralelos.

ao produto da massa total do corpo pelo quadrado da distância do centro de massa ao eixo z. Representamos esta distância por l. Isto é $l^2 = x_{cm}^2 + y_{cm}^2$.

Agora, da definição do centro de massa

$$\sum_i m_i \overline{x}_i = \sum_i m_i \overline{y}_i = 0$$

De modo que as duas últimas somas da direita da Equação (5.40) são nulas e o resultado final pode ser escrito

$$I = I_{cm} + ml^2 \tag{5.41}$$

Este é o teorema dos eixos paralelos. Ele pode ser aplicado a qualquer corpo rígido tanto sólido quanto laminar. Este teorema estabelece que o momento de inércia, de um corpo rígido, relativo a um eixo qualquer é igual ao momento de inércia relativo a um eixo paralelo ao primeiro, passando pelo centro de massa, mais o produto da massa do corpo pelo quadrado da distância entre os eixos.

Aplicando o teorema acima a um disco circular, temos, das Equações (5.33) e (5.41)

$$I = \frac{1}{2}ma^2 + ma^2 = \frac{3}{2}ma^2 \tag{5.42}$$

para o momento de inércia de um disco circular uniforme, relativo a um eixo perpendicular ao seu plano, passando por sua borda.

Por outro lado, das Equações (5.38) e (5.41) temos

$$I = \frac{1}{4}ma^2 + ma^2$$

para o momento de inércia do mesmo disco, relativo a um eixo paralelo ao seu plano, tangente à borda.

Raio de Giração

Com diversos propósitos, é conveniente se expressar o momento de inércia de um corpo rígido em termos da distância k denominada *raio de giração*, onde k é definido pela equação

$$I = mk^2 \qquad \text{ou} \qquad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{5.43}$$

Por exemplo, o raio de giração de uma barra fina, relativo a um eixo perpendicular que passa por uma extremidade (veja a Equação 7.30) é

$$k = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}ma^2}{m}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Os momentos de inércia de vários objetos podem ser tabelados simplesmente através dos quadrados de seus raios de giração.

5.5 O Pêndulo Físico

Um corpo rígido que está livre para oscilar, sob ação de seu próprio peso, em relação a um eixo horizontal fixo é denominado **pêndulo físico** ou **pêndulo composto**. Um pêndulo físico é mostrado na Figura 5.10 onde O representa a localização do eixo de rotação, e cm é o centro de massa. A distância entre O e cm é l como pode ser visto.

Representando o ângulo entre a linha Ocm e a vertical OA por θ, o momento da força gravitacional (atuante no cm) relativo ao eixo de rotação tem módulo

$$mgl \operatorname{sen} \theta$$

A equação fundamental de movimento

$$N = I\dot{\omega}$$

pode então tomar a forma

$$-mgl \operatorname{sen} \theta = I\ddot{\theta}$$

ou

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I} \operatorname{sen} \theta = 0 \tag{5.44}$$

A equação acima é formalmente idêntica à equação do movimento de um pêndulo simples. Para pequenas oscilações, como no caso do pêndulo simples, podemos substituir $\operatorname{sen} \theta$ por θ

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = 0 \tag{5.45}$$

A solução é

$$\theta = \theta_0 \cos(2\pi f t + \epsilon) \tag{5.46}$$

onde θ_0 é a amplitude e ϵ é o ângulo de fase. A frequência da oscilação f é dada por

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{I}} \tag{5.47}$$

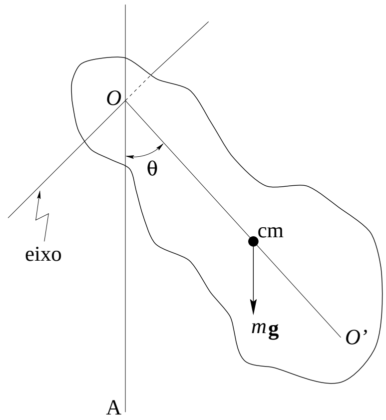


Figura 5.10: O pêndulo físico.

O período T é portanto

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} \tag{5.48}$$

(Para evitar confusão, não usaremos um símbolo específico para representar a frequência angular cujo valor é dado pelo produto $2\pi f$). A expressão do período em termos do raio de giração k é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k^2}{gl}} \tag{5.49}$$

Desta forma, vemos que o período de um pêndulo composto é igual ao de um pêndulo simples de comprimento k^2/l. Como exemplo, podemos analisar o caso de uma barra fina e uniforme de comprimento a oscilando em torno de um de seus extremos ($k^2 = a^2/3$). Seu período é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}}$$

Centro de Oscilação

Usando o teorema dos eixos paralelos, podemos expressar o raio de giração k em termos do raio de giração relativo ao centro de massa k_{cm}

$$I = I_{cm} + ml^2$$

ou

$$mk^2 = mk_{cm}^2 + ml^2$$

Cancelando as massas

$$k^2 = k_{cm}^2 + l^2 \tag{5.50}$$

A Equação (5.49) pode então ser escrita

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^2 + l^2}{gl}} \tag{5.51}$$

Suponha que o eixo de rotação de um pêndulo físico seja transferido para a posição O' à distância l' do centro de massa, como mostra a Figura 5.10. O período da oscilação T' relativo ao novo eixo é dado por

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{k_{cm}^2 + l'^2}{gl'}} \tag{5.52}$$

Segue-se que os períodos de oscilação em torno de O e em torno de O' serão iguais se

$$\frac{k_{cm}^2 + l^2}{gl} = \frac{k_{cm}^2 + l'^2}{gl'}$$

que se reduz a

$$ll' = k_{cm}^2 \tag{5.53}$$

O ponto O' é denominado **centro de oscilação** do ponto O. É claro que O também é centro de oscilação do ponto O'. Desta maneira, em torno de uma extremidade de uma barra temos $k_{cm}^2 = a^2/12$ e $l = a/2$. Usando a Equação (5.53) encontramos $l' = a/6$ e portanto a barra terá o mesmo período quando o eixo for transferido da extremidade para a posição O' situada à distância $a/6$ do seu centro.

5.6 Teorema Geral Relativo ao Momentum Angular

Com o objetivo de se estudar o caso mais geral do movimento de um corpo rígido, no qual o eixo de rotação não é fixo, precisamos desenvolver um teorema fundamental relativo ao momentum angular. Como vimos na Seção 4.2, a taxa de variação temporal do momentum angular de qualquer sistema é igual ao torque aplicado

$$\frac{d\vec{\mathrm{L}}}{dt} = \vec{\mathrm{N}} \tag{5.54}$$

ou explicitamente

$$\frac{d}{dt}\sum_i (\vec{\mathrm{r}}_i \times m_i\vec{\mathrm{v}}_i) = \sum_i (\vec{\mathrm{r}}_i \times \vec{\mathrm{F}}_i) \tag{5.55}$$

Nas equações acima, todas as quantidades se referem a um sistema inercial de coordenadas.

Agora vamos introduzir o centro de massa para expressar o vetor posição de cada partícula $\vec{\mathrm{r}}_i$ em termos da posição do centro de massa $\vec{\mathrm{r}}_{cm}$ e do vetor posição da partícula i em relação ao centro de massa $\bar{\vec{\mathrm{r}}}_i$ (como na Seção 4.3)

$$\vec{\mathrm{r}}_i = \vec{\mathrm{r}}_{cm} + \bar{\vec{\mathrm{r}}}_i$$

e

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \vec{\mathrm{v}}_{cm} + \bar{\vec{\mathrm{v}}}_i$$

A Equação (5.55) fica

$$\frac{d}{dt}\sum_i \left[(\vec{\mathrm{r}}_{cm} + \bar{\vec{\mathrm{r}}}_i) \times m_i(\vec{\mathrm{v}}_{cm} + \bar{\vec{\mathrm{v}}}_i)\right] = \sum_i (\vec{\mathrm{r}}_{cm} + \bar{\vec{\mathrm{r}}}_i) \times \vec{\mathrm{F}}_i \tag{5.56}$$

Desenvolvendo esta expressão e usando o fato de que tanto $\sum m_i \bar{\vec{r}}_i$ quanto $\sum m_i \bar{\vec{v}}_i$ são nulas, podemos reduzir a Equação (5.56) a

$$\vec{r}_{cm} \times \sum m_i \vec{a}_{cm} + \frac{d}{dt} \sum \bar{\vec{r}}_i \times m_i \bar{\vec{v}}_i = \vec{r}_{cm} \times \sum \vec{F}_i + \sum \bar{\vec{r}}_i \times \vec{F}_i \tag{5.57}$$

onde $\vec{a}_{cm} = \dot{\vec{v}}_{cm}$.

Na Seção 4.1 mostramos que a translação do centro de massa de qualquer sistema de partículas obedece à equação

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_{cm} \tag{5.58}$$

Consequentemente o primeiro termo à esquerda da Equação (5.57) cancela-se com o primeiro termo à direita. O resultado final é

$$\frac{d}{dt} \sum_i \bar{\vec{r}}_i \times m_i \bar{\vec{v}}_i = \sum_i \bar{\vec{r}}_i \times \vec{F}_i \tag{5.59}$$

A soma à esquerda na equação acima é exatamente o momentum angular do sistema e a soma à direita é o momento total das forças externas relativo ao centro de massa. Representando estas quantidades por $\bar{\vec{L}}$ e $\bar{\vec{N}}$, respectivamente, temos

$$\frac{d\bar{\vec{L}}}{dt} = \bar{\vec{N}} \tag{5.60}$$

Este resultado estabelece que a taxa de variação temporal do momentum angular relativo ao centro de massa de qualquer sistema é igual ao momento total das forças externas relativo ao centro de massa. Isto é verdadeiro mesmo que o centro de massa esteja se acelerando. Se tomarmos qualquer outro ponto além do centro de massa como ponto de referência, então tal ponto precisa estar em repouso em um sistema de referência inercial (exceto para certos casos especiais para os quais não vamos nos reter em discussão).

Um exemplo do uso deste teorema é dado na Seção 5.8.

5.7 Movimento Laminar de um Corpo Rígido

Se o movimento do corpo ocorre de modo que todas as suas partículas se deslocam paralelamente a um determinado plano fixo, então este movimento é denominado laminar. No movimento laminar, o eixo de rotação pode mudar de posição mas não muda de direção. A rotação em torno de um eixo fixo é um caso especial de movimento laminar. Outro exemplo é o de cilindro que rola sobre um determinado plano.

Se um corpo possui um deslocamento laminar, tal deslocamento pode ser especificado como se segue.

Escolhemos um ponto de referência no corpo, por exemplo, o centro de massa; o ponto em questão se desloca de $\Delta\vec{r}$, ao mesmo tempo o corpo gira em relação ao ponto de referência de um ângulo $\Delta\phi$. É claro que qualquer deslocamento laminar pode ser especificado desta maneira. Consequentemente, o movimento laminar pode ser especificado conhecendo-se a

velocidade translacional de um ponto de referência adequado, juntamente com a velocidade angular.

A equação fundamental que governa a translação de um corpo rígido é

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}_{cm} = m\dot{\vec{v}}_{cm} = m\vec{a}_{cm} \tag{5.61}$$

onde $\vec{F}$ representa a soma de todas as forças externas que agem sobre o corpo, m é a massa e $\vec{a}_{cm}$ a aceleração do centro de massa.

A aplicação da Equação (5.25) ao caso de um movimento laminar de um corpo rígido nos fornece

$$L = I_{cm}\omega \tag{5.62}$$

para o módulo do momentum angular relativo a um eixo C que passa através do centro de massa, onde ω é a velocidade angular da rotação em torno desse eixo.

A equação fundamental que governa a rotação do corpo, Equação (5.60), fica então

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I_{cm}\dot{\vec{\omega}} = \vec{N} \tag{5.63}$$

onde $\vec{N}$ é o momento total das forças aplicadas, relativo ao eixo C.

5.8 Corpo Rolando em um Plano Inclinado

Para ilustrar o movimento laminar, vamos estudar o movimento de um objeto que possua seção circular (cilindro, bola, etc ....) rolando para baixo em um plano inclinado. Como mostra a Figura 5.11, existem três forças agindo no corpo. Elas são: (1) a força da gravidade; (2) a força de reação normal do plano sobre o corpo ($\vec{F}_N$) e (3) a força de atrito ($\vec{F}$), paralela ao plano.

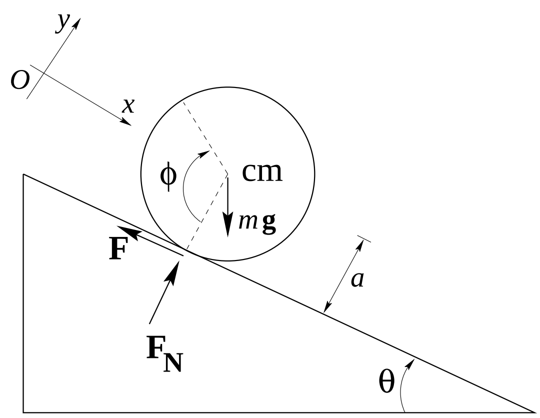


Figura 5.11: Corpo rolando em um plano inclinado.

Escolhendo os eixos como mostra a Figura, as equações das componentes do movimento translacional do centro de massa são

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{cm} &= mg\,\text{sen}\,\theta - F \qquad (5.64)\\ m\ddot{y}_{cm} &= -mg\cos\theta + F_N \qquad (5.65)\end{aligned}$$

onde θ é o ângulo de inclinação do plano em relação à horizontal. Uma vez que o corpo permanece em contato com o plano,

$$y_{cm} = \text{constante}$$

e portanto $\ddot{y}_{cm} = 0$, de modo que, da Equação (5.65) temos

$$F_N = mg\cos\theta \qquad (5.66)$$

A única força que provoca torque em relação ao centro de massa é a força de atrito. O módulo desse momento é Fa onde a é o raio do corpo. Deste modo, a equação rotacional (5.63) fica

$$I_{cm}\dot{\omega} = Fa \qquad (5.67)$$

Para discutir o movimento mais adiante, precisamos fazer algumas suposições relativas ao contato do corpo com o plano. Vamos resolver as equações do movimento para dois casos.

Movimento sem deslizamento

Se o contato é muito rugoso tal que não ocorre deslizamento do corpo, temos as seguintes relações

$$\begin{aligned} x_{cm} &= a\phi \\ \dot{x}_{cm} &= a\dot{\phi} = a\omega \\ \ddot{x}_{cm} &= a\ddot{\phi} = a\dot{\omega} \end{aligned} \qquad (5.68)$$

onde ϕ é o ângulo associado à rotação. A Equação (5.67) pode então ser escrita

$$\frac{I_{cm}}{a^2}\ddot{x}_{cm} = F \qquad (5.69)$$

Substituindo o valor de F (acima) na Equação (5.64) temos

$$m\ddot{x}_{cm} = mg\,\text{sen}\,\theta - \frac{I_{cm}}{a^2}\ddot{x}_{cm}$$

resolvendo para $\ddot{x}_{cm}$ encontramos

$$\ddot{x}_{cm} = \frac{mg\,\text{sen}\,\theta}{m + (I_{cm}/a^2)} = \frac{g\,\text{sen}\,\theta}{1 + (k_{cm}^2/a^2)} \qquad (5.70)$$

onde k_{cm} é o raio de giração em relação ao centro de massa. O corpo rola, portanto, com aceleração linear constante e, por consequência da Equação (5.68), com aceleração angular constante.

Por exemplo, a aceleração linear de um cilindro uniforme ($k_{cm}^2 = a^2/2$) é

$$\frac{g \operatorname{sen}\theta}{1+1/2} = \frac{2}{3} g \operatorname{sen}\theta$$

enquanto que para uma esfera uniforme ($k_{cm}^2 = 2a^2/5$) é

$$\frac{g \operatorname{sen}\theta}{1+2/5} = \frac{5}{7} g \operatorname{sen}\theta$$

Considerações sobre energia

Os resultados acima podem ser também obtidos à partir de considerações energéticas. Em um campo gravitacional uniforme, a energia potencial V de um corpo rígido é dada pela soma das energias potenciais individuais de todas as partículas

$$V = \sum_i (m_i g z_i) = m g z_{cm}$$

onde z_{cm} é a distância vertical do centro de massa a um plano arbitrário de referência. Se as outras forças, além da gravitacional, não realizarem trabalho, então o movimento é conservativo e podemos escrever

$$T + V = T + m g z_{cm} = E = \text{constante}$$

onde T é a energia cinética.

No caso de um corpo rolando num plano inclinado, Figura 5.11, a energia cinética de translação é $m\dot{x}_{cm}^2/2$ e a de rotação é $I_{cm}\omega^2/2$ de modo que a equação da energia fica

$$\frac{1}{2} m \dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega^2 + m g z_{cm} = E$$

mas $\omega = \dot{x}_{cm}/a$ e $z_{cm} = -x_{cm} \operatorname{sen}\theta$; logo

$$\frac{1}{2}\dot{x}_{cm}^2 + \frac{1}{2} k_{cm}^2 \frac{\dot{x}_{cm}^2}{a^2} - g x_{cm} \operatorname{sen}\theta = E$$

No caso de rolamento puro a força de atrito não afeta a equação de energia uma vez que é perpendicular ao deslocamento e consequentemente não realiza trabalho; logo E é constante.

Diferenciando em relação ao tempo e agrupando os termos temos

$$\dot{x}_{cm}\ddot{x}_{cm}\left(1 + \frac{k_{cm}^2}{a^2}\right) - g\dot{x}_{cm} \operatorname{sen}\theta = 0$$

Cancelando o fator comum $\dot{x}_{cm}$ (supondo é claro que $\dot{x}_{cm} \neq 0$) e resolvendo para $\ddot{x}_{cm}$ encontramos o mesmo resultado obtido anteriormente com o uso de forças e momentos.

Ocorrência de Deslizamento

Consideremos agora o caso em que o contato com o plano não é perfeitamente rugoso mas tem um certo coeficiente de atrito de deslizamento μ. Havendo este deslizamento, o módulo da força de atrito F é

$$F = \mu F_N = \mu mg \cos\theta \tag{5.71}$$

A equação da translação (5.64) fica então:

$$m\ddot{x}_{cm} = mg \operatorname{sen}\theta - \mu mg \cos\theta \tag{5.72}$$

e a equação de rotação (5.67) fica

$$I_{cm}\dot{\omega} = \mu mga \cos\theta \tag{5.73}$$

Da Equação (5.72) vemos novamente que o centro de massa possui aceleração constante

$$\ddot{x}_{cm} = g(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta) \tag{5.74}$$

e, ao mesmo tempo, a aceleração angular é constante

$$\dot{\omega} = \frac{\mu mga\cos\theta}{I_{cm}} = \frac{\mu ga\cos\theta}{k_{cm}^2} \tag{5.75}$$

Integrando estas duas equações em relação ao tempo e, supondo que o corpo parta do repouso (isto é: em $t = 0$, $\dot{x}_{cm} = 0$, $\dot{\phi}_{cm} = 0$) temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cm} &= g(\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta)t \\ \omega &= \dot{\phi} = g\left(\frac{\mu a\cos\theta}{k_{cm}^2}\right)t \end{aligned} \tag{5.76}$$

Consequentemente as velocidades linear e angular têm razão constante e podemos escrever

$$\dot{x}_{cm} = \gamma a\omega$$

onde

$$\gamma = \frac{\operatorname{sen}\theta - \mu\cos\theta}{\mu a^2\cos\theta/k_{cm}^2} = \frac{k_{cm}^2}{a^2}\left(\frac{\tan\theta}{\mu} - 1\right) \tag{5.77}$$

Mas, $a\omega$ não pode ser maior que $\dot{x}_{cm}$, de modo que γ não pode ser menor que a unidade.

O caso limite, para o qual não existe deslizamento, é dado por $\dot{x}_{cm} = a\omega$ ou seja $\gamma = 1$. Resolvendo a Equação (5.77) para μ, com $\gamma = 1$, obtemos o valor crítico de μ que é dado por

$$\mu_{crit} = \frac{\tan\theta}{1 + (a/k_{cm})^2} \tag{5.78}$$

Se μ for maior que este valor, o corpo rola sem deslizar. Por exemplo, se uma bola é colocada em um plano com $\theta = 45°$, ela irá rolar, sem deslizar, se o coeficiente μ for maior que $\tan 45°/(1 + 5/2)$ ou $2/7$.

5.9 Movimento de um Corpo Rígido Sob a Ação de uma Força Impulsiva

No Capítulo anterior introduzimos o conceito de uma força impulsiva agindo em uma partícula. Vimos que o efeito de tal força, ou impulso, é o de produzir uma mudança súbita na velocidade da partícula. Nesta Seção vamos estender o conceito de impulso ao caso do movimento laminar de um corpo rígido.

Movimento Livre

Suponhamos que um corpo se encontre livre para movimentar-se em um plano e esteja submetido a um impulso $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$. Nestas circunstâncias, de acordo com a teoria geral discutida na Seção 5.7, temos que considerar tanto a translação quanto a rotação do corpo.

Primeiramente, a translação é descrita pela fórmula geral

$$\vec{\mathrm{F}} = m\dot{\vec{\mathrm{v}}}_{cm}$$

se $\vec{\mathrm{F}}$ é uma força impulsiva, temos

$$\int \vec{\mathrm{F}} dt = \hat{\vec{\mathrm{P}}} = m\Delta\vec{\mathrm{v}}_{cm}$$

De modo que o resultado do impulso é causar uma variação na velocidade do centro de massa igual a

$$\Delta\vec{\mathrm{v}}_{cm} = \frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}}}{m} \tag{5.79}$$

Em segundo lugar, a rotação do corpo é governada pela equação

$$\vec{\mathrm{N}} = \dot{\vec{\mathrm{L}}} = I_{cm}\dot{\vec{\omega}}$$

Integrando em relação ao tempo obtemos a relação

$$\int \vec{\mathrm{N}} dt = I_{cm}\Delta\vec{\omega} \tag{5.80}$$

Chamamos a integral acima de **impulso rotacional**. Usemos o símbolo $\hat{\vec{\mathrm{L}}}$ para designá-lo. O efeito de um impulso rotacional é pois o de causar uma variação na velocidade angular do corpo de uma quantidade

$$\Delta\vec{\omega} = \frac{\hat{\vec{\mathrm{L}}}}{I_{cm}} \tag{5.81}$$

Se o impulso primário $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$ é aplicado ao corpo de um modo que sua linha de ação está à distância b do centro de massa, o momento da força ($\vec{\mathrm{N}} = \vec{\mathrm{b}} \times \vec{\mathrm{F}}$), e consequentemente

$$\hat{\vec{\mathrm{L}}} = \vec{\mathrm{b}} \times \hat{\vec{\mathrm{P}}} \tag{5.82}$$

Podemos então expressar a variação na velocidade angular produzida por um impulso como

$$\Delta\vec{\omega} = \frac{\vec{\mathrm{b}} \times \hat{\vec{\mathrm{P}}}}{I_{cm}} \tag{5.83}$$

Em resumo: o efeito de um impulso sobre um corpo rígido, livre para deslocar-se em movimento laminar é (1) produzir uma mudança súbita na velocidade do centro de massa – efeito translacional e (2) produzir uma mudança súbita na velocidade angular do corpo – efeito rotacional.

Movimento Forçado

No caso em que o corpo submetido a uma força impulsiva não está livre, mas é obrigado a girar em torno de um eixo fixo, devemos considerar apenas a condição de rotação $N = I\dot{\omega}$ de modo que

$$\int N dt = \hat{L} = I\Delta\omega$$

Na equação acima I é o momento de inércia em torno do eixo fixo de rotação e N é o momento em relação a esse eixo. Neste caso, o impulso rotacional $\hat{L}$, que é produzido pelo impulso primário simples $\hat{P}$ cuja linha de ação está à distância b do eixo de rotação, é dado por

$$\hat{L} = \hat{P}b$$

de modo que

$$\Delta\omega = \frac{\hat{P}b}{I} \tag{5.84}$$

é a variação da velocidade angular em torno do eixo fixo de rotação.

Efeito de Vários Impulsos Simultâneos

Se um certo número de impulsos diferentes é aplicado simultaneamente em um corpo rígido, as variações resultantes da velocidade do centro de massa e da velocidade angular do corpo são obtidas pelas adições dos impulsos e momentos, respectivamente. Desta forma, o efeito translacional de vários impulsos simultâneos é obtido pela soma vetorial dos impulsos individuais de modo que a Equação (5.79) fica

$$\Delta\vec{\mathrm{v}}_{cm} = \frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}}_1 + \hat{\vec{\mathrm{P}}}_2 + \ldots}{m} \tag{5.85}$$

De modo análogo, para o efeito rotacional, a Equação (5.83) se modifica para

$$\Delta\omega = \frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}}_1 b_1 + \hat{\vec{\mathrm{P}}}_2 b_2 + \ldots}{I_{cm}} \tag{5.86}$$

No caso de um corpo que é obrigado a girar em torno de um eixo fixo, existe um impulso secundário devido à reação do eixo sobre o corpo quando um impulso externo é aplicado. O

movimento é então determinado pela soma de todos os impulsos de acordo com as equações acima.

Exemplos

1. Impulso Aplicado em uma Barra Livre

Como ilustração da teoria descrita acima, consideremos uma barra que está livre para deslizar sobre uma superfície lisa horizontal. Seja $\vec{\hat{\mathrm{P}}}$ o impulso aplicado à barra à distância b do seu centro de massa em uma direção perpendicular ao comprimento da barra, como mostra a Figura 5.12.

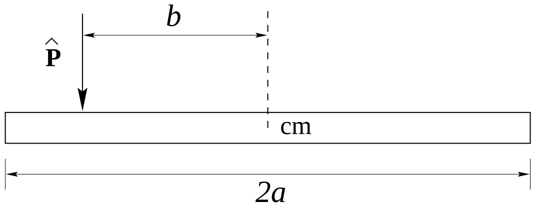


Figura 5.12: Impulso aplicado a uma barra livre.

Se a barra estiver inicialmente em repouso, as equações para a translação e para a rotação são respectivamente

$$\vec{\mathrm{v}}_{cm} = \frac{\vec{\hat{\mathrm{P}}}}{m} \tag{5.87}$$

$$\omega = \frac{\hat{P}b}{I_{cm}} \tag{5.88}$$

Em particular, se a barra é uniforme de comprimento $2a$, então $I_{cm} = ma^2/3$

$$\omega = \hat{P}\frac{3b}{ma^2} \tag{5.89}$$

e portanto, a velocidade adquirida pelo centro de massa é a mesma qualquer que seja o ponto de aplicação do impulso enquanto que a velocidade angular adquirida pela barra depende do ponto de aplicação do impulso. Vimos também que a energia cinética final da barra é

$$T = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{3\hat{P}^2}{2m}\left(\frac{b}{a}\right)^2$$

e é claro que ela depende do ponto de aplicação do impulso.

2. Impulso Aplicado a uma Barra Obrigada a Girar em Torno de um Eixo Fixo

Vamos considerar o caso em que a mesma barra do exemplo 1 esteja obrigada a girar em torno de um eixo fixo. Suponhamos que o eixo O esteja localizado em um dos seus extremos como mostra a Figura 5.13. Neste caso, temos a seguinte equação rotacional

$$L = \hat{P}(a+b) = I_o\omega \tag{5.90}$$

Como $I_o = (4/3)ma^2$ obtemos

$$\omega = \hat{P}\frac{3(a+b)}{4ma^2} \tag{5.91}$$

para a velocidade angular adquirida pela barra. Agora, uma vez que a barra gira em torno de O, o centro de massa está em movimento. Sua velocidade é

$$v_{cm} = a\omega$$

ou

$$v_{cm} = \hat{P}\frac{3(a+b)}{4ma} \tag{5.92}$$

Notamos que é diferente de $\hat{P}/m$. A primeira vista este resultado parece contradizer a equação geral para translação, Equação (5.79). Na verdade não há contradição porque existe um outro impulso que age sobre a barra simultaneamente, como já foi mencionado. Este é o impulso de reação exercido sobre a barra pelo eixo no ponto O. Vamos denotá-lo por $\hat{\vec{\mathrm{P}}}_o$. A velocidade adquirida pelo centro de massa é

$$\vec{\mathrm{v}}_{cm} = \frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}} + \hat{\vec{\mathrm{P}}}_o}{m} \tag{5.93}$$

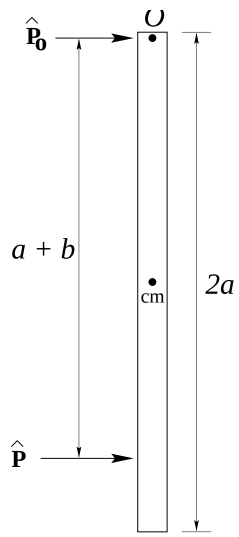


Figura 5.13: Impulso aplicado a uma barra que é obrigada a girar em torno de uma de suas extremidades. O impulso de reação no eixo é $\hat{\vec{\mathrm{P}}}_o$.

Podemos então calcular $\hat{\vec{\mathrm{P}}}_o$ usando o valor de v_{cm} dado pela Equação (5.92). Desta forma temos

$$\frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}}3(a+b)}{4ma} = \frac{\hat{\vec{\mathrm{P}}} + \hat{\vec{\mathrm{P}}}_o}{m}$$

que nos leva a

$$\hat{\vec{\mathrm{P}}}_o = \hat{\vec{\mathrm{P}}}\frac{3b-a}{4a} \tag{5.94}$$

Para o impulso recebido pela barra devido à reação do eixo. Pela lei da ação e reação, o impulso recebido pelo eixo é $-\hat{\vec{\mathrm{P}}}_o$.

Deve-se notar que o impulso de reação pode ser nulo caso se aplique o impulso primário em um ponto escolhido adequadamente. Este ponto é denominado **centro de percussão**. No presente caso, este ponto é tal que $b = a/3$.

5.10 Colisões de Corpos Rígidos

Nos problemas que envolvem colisões de corpos rígidos, as forças que os corpos exercem uns sobre os outros durante o contato são sempre iguais e opostas. Consequentemente, os princípios de conservação de momentum linear e momentum angular são válidos. Os conceitos de impulsos lineares e rotacionais são de grande valia nestes problemas.

Exemplo

Colisão entre uma Bola e uma Barra

Considere, por exemplo, o impacto de uma bola de massa m' com uma barra uniforme de comprimento $2a$ e massa m. Vamos supor que a barra esteja inicialmente em repouso em uma superfície lisa horizontal, como nos casos anteriores, e que o ponto de impacto seja à distância b do centro de massa como mostra a Figura 5.14.

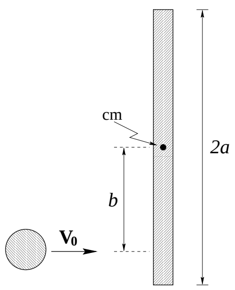


Figura 5.14: Colisão de uma partícula e uma barra.

As Equações (5.87) e (5.88) dão o movimento da barra após o impacto em termos do impulso $\hat{\vec{\mathrm{P}}}$ aplicado pela bola sobre a barra. Sabemos também que o impulso recebido pela

bola neste impacto é $-\hat{\vec{P}}$. Podemos então escrever as equações para a translação

$$\hat{\vec{P}} = m\vec{v}_{cm} \tag{5.95}$$
$$-\hat{\vec{P}} = m'(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) \tag{5.96}$$

onde $\vec{v}_{cm}$ é a velocidade do centro de massa da barra após o impacto, $\vec{v}_0$ é a velocidade da bola antes do impacto e $\vec{v}_1$ é a velocidade final da bola. O conjunto das duas equações relativas à translação implicam na conservação do momentum linear pois, eliminando $\hat{\vec{P}}$ das duas temos

$$m'\vec{v}_0 = m'\vec{v}_1 + m\vec{v}_{cm} \tag{5.97}$$

Com o objetivo de determinarmos a rotação da barra após o impacto, podemos usar o princípio de conservação do momentum angular. O momentum angular inicial da bola em relação ao centro de massa da barra é $bm'v_0$ e o final é $bm'v_1$. Para a barra o inicial é zero e o final é $I_{cm}\omega$. Deste modo

$$bm'v_0 = bm'v_1 + I_{cm}\omega \tag{5.98}$$

As equações acima (translacional e rotacional) não são suficientes para calcularmos as três velocidades (v_1, v_{cm} e ω) do movimento final.

Para calcularmos este movimento completamente, necessitamos ainda de outra equação. Esta pode ser a equação do balanço de energia

$$\frac{1}{2}m'v_0^2 = \frac{1}{2}m'v_1^2 + \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + Q \tag{5.99}$$

em que Q é a perda de energia devida à colisão. Alternativamente, podemos usar a equação do coeficiente de restituição

$$\epsilon = \frac{\text{velocidade de afastamento}}{\text{velocidade de aproximação}}$$

No problema em questão temos

$$\text{velocidade de aproximação} = v_0$$

Para calcularmos a velocidade de afastamento, precisamos conhecer a velocidade da barra no ponto de impacto. Esta é dada pela soma das velocidades, translacional do centro de massa e a rotacional daquele ponto relativa ao centro de massa.

Deste modo, a velocidade do ponto de impacto imediatamente após a colisão é $v_{cm} + b\omega$. Podemos então escrever

$$\text{velocidade de afastamento} = v_{cm} + b\omega - v_0$$

Portanto

$$\epsilon v_0 = v_{cm} + b\omega - v_0$$

Temos agora equações em número suficiente para resolver o problema. Fazendo $I_{cm} = ma^2/3$ obtemos

$$\begin{aligned} v_{cm} &= v_0(\epsilon+1)\left(\frac{m}{m'}+\frac{3b^2}{a^2}+1\right)^{-1} \\ v_1 &= v_0 - \frac{m}{m'}v_{cm} \\ \omega &= v_{cm}\left(\frac{3b}{a^2}\right) \end{aligned} \qquad (5.100)$$

O leitor deve verificar estes resultados.

Exercícios de Treinamento

5.1 Ache o centro de massa de:

a) Um fio fino e uniforme dobrado na forma de um U em que cada seção de reta tem o mesmo comprimento a.

b) A área limitada pela parábola $y = ax^2$ e a reta $y = b$.

c) O volume limitado pelo parabolóide de revolução $z = a(x^2 + y^2)$ e o plano $z = b$.

d) Um cone reto circular uniforme de altura h.

5.2 Uma esfera sólida uniforme de raio a contém uma cavidade esférica de raio b centrada a uma distância c do centro da esfera, em que $a > (b+c)$. Ache o seu centro de massa.

5.3 Ache os momentos de inércia de cada uma das figuras do exercício 5.1, em relação a seus eixos de simetria.

5.4 Ache o momento de inércia da esfera do exercício 5.2 em relação ao eixo que passa pelos centros da esfera e da cavidade.

5.5 Mostre que o momento de inércia de um octante sólido uniforme de uma esfera de raio a é $2ma^2/5$, em relação a um eixo que passa por uma de suas arestas (Nota: esta é a mesma expressão para o momento de inércia relativo ao centro de uma esfera sólida de mesmo raio).

Problemas

5.6 Um arame de forma semi-circular pende apoiado em um prego. A linha que une seus extremos faz um ângulo θ com a horizontal e o arame está a ponto de escorregar. Qual é o coeficiente de atrito entre o arame e o prego?

5.7 Um hemisfério sólido uniforme apoia-se em uma parede vertical e está prestes a escorregar. O lado redondo do hemisfério está em contato com a parede e o chão. Se o coeficiente de atrito μ é o mesmo para a parede e o chão, encontre o ângulo entre a face plana do hemisfério e o chão.

5.8 Uma casca hemisférica uniforme apoia-se sobre um plano inclinado de ângulo θ e está prestes a perder o equilíbrio. O lado redondo da casca está em contato com o plano e o coeficiente de atrito é μ. Encontre a inclinação da casca.

5.9 Sabe-se que um conjunto de forças $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... age em certo corpo rígido de modo que ele está (a) em equilíbrio translacional e (b) em equilíbrio rotacional em relação a certo ponto O. Prove que esse conjunto de forças está também em equilíbrio rotacional em relação a qualquer outro ponto O'.

5.10 Mostre que os momentos de inércia de um sólido paralelepipédico regular uniforme, de um cilindro elíptico, e de um elipsóide são respectivamente, $(m/3)(a^2+b^2)$; $(m/4)(a^2+b^2)$ e $(m/5)(a^2+b^2)$ onde m é a massa e $2a$ e $2b$ são os diâmetros principais do sólido, perpendiculares ao eixo de rotação sendo que este último passa pelo centro em cada caso.

5.11 Um aro circular de raio a oscila como pêndulo físico em torno de um ponto na sua circunferência. Ache o período de oscilação se o eixo de rotação é (a) normal ao plano do aro; (b) paralelo ao plano do aro.

5.12 Mostre que o período de um pêndulo físico é igual a $2\pi(d/g)^{1/2}$ em que d é a distância entre o ponto de suspensão O e o centro de oscilação O'.

5.13 Uma bola sólida uniforme está enrolada por algumas voltas de corda leve. Se a extremidade da corda é mantida fixa e a bola cai sob a ação da gravidade, qual é a aceleração do centro da bola?

5.14 Dois homens seguram as extremidades de uma prancha uniforme de comprimento l e massa m. Mostre que, se um dos homens solta a sua extremidade repentinamente, o peso suportado pelo outro cai de repente de $mg/2$ para $mg/4$. Mostre também que a aceleração vertical da extremidade livre é $3g/2$.

5.15 Uma bola sólida uniforme contém uma cavidade oca esférica no seu centro, cujo raio é a metade do da bola. Mostre que a aceleração da bola ao rolar por um plano inclinado áspero é 98/101 da aceleração da bola sem cavidade (Nota: isto sugere um método para teste não destrutivo).

5.16 Dois pesos de massas m_1 e m_2 estão amarrados aos extremos de um fio leve e inextensível. O fio passa em uma roldana de raio a e momento de inércia I. Encontre a aceleração dos pesos (considere $m_1 > m_2$) desprezando o atrito no eixo da roldana.

5.17 Um cilindro reto circular uniforme de raio a é equilibrado em cima de um cilindro áspero e fixo de raio b ($b > a$), os eixos dos dois cilindros são paralelos. Se o equilíbrio é levemente perturbado, encontre o ponto em que o cilindro móvel perde o contato com o fixo.

5.18 Uma escada está encostada em uma parede vertical lisa. Se o chão também é liso e o ângulo inicial entre a escada e ele é θ_0, mostre que a escada ao cair deslizando perde contato com a parede quando o ângulo entre o chão e a escada é $\operatorname{arc\,sen}(2/3 \operatorname{sen} \theta_0)$.

5.19 Uma barra comprida e uniforme de comprimento l está parada na vertical, sobre um assoalho áspero. A barra é ligeiramente perturbada e cai ao chão. (a) Encontre as componentes vertical e horizontal da reação do piso como função do ângulo θ entre a barra e a vertical em um instante qualquer. (b) Encontre também o ângulo para o qual a barra começa a escorregar. O coeficiente de atrito entre a barra e o chão é μ.

5.20 Uma bola de bilhar de raio a está inicialmente girando em torno de um eixo horizontal com velocidade angular ω_0 e com velocidade inicial de translação nula. Se o coeficiente de atrito entre a bola e a mesa é μ, ache a distância percorrida pela bola até desaparecer o seu deslizamento.

5.21 Uma bola é jogada com velocidade v_0 para subir um plano inclinado áspero com inclinação θ e coeficiente de atrito μ. Encontre a posição da bola como função do tempo e determine a posição da bola quando passar a ocorrer rolamento puro (sem deslizamento). Considere que μ é maior que $(2/7)\tan\theta$.

5.22 (a) Um aro circular uniforme repousa sobre uma superfície horizontal livre. Se ele é golpeado tangencialmente em um ponto da periferia, em torno de qual ponto ele começa a girar? (b) Ache a altura em que uma bola de bilhar deve ser golpeada para que role sem deslizar.

5.23 Mostre que o centro de oscilação de um pêndulo físico é tambem o centro de percussão para um impulso aplicado no eixo de rotação.

5.24 Um pêndulo balístico é feito de uma prancha comprida de comprimento l e massa m. Ele se encontra livre para oscilar em torno de um extremo O, e está inicialmente em repouso na vertical. Uma bala de massa m' é disparada horizontalmente atingindo o pêndulo à distância l do ponto O vindo a se alojar no pêndulo. Se a amplitude da oscilação é θ_0, encontre a velocidade da bala.

5.25 Duas barras uniformes AB e BC de massas iguais (m) e mesmos comprimentos (l) estão levemente ligadas no ponto B. O sistema está inicialmente em repouso sobre uma superfície lisa horizontal, os pontos A, B e C estão alinhados. Se um impulso $\vec{\mathrm{p}}$ é aplicado em A, em ângulo reto com as barras, encontre o movimento inicial do sistema. (Sugestão: isole as barras).

5.26 Resolva o problema acima para o caso em que as barras estejam em ângulo reto entre si.

Respostas de Problemas Ímpares Selecionados

5.1 (a) $a/3$ do centro inferior
(b) $3b/5$ do vétice
(c) $2b/3$ do vértice
(d) $3h/4$ do vértice

5.3 (a) $7ma^2/36$ onde m = massa total
(d) $3ma^2/10$ onde a é o raio da base.

5.7 $\operatorname{sen}\theta = 8\mu(1+\mu)/3(1+\mu^2)$

5.11 $2\pi\sqrt{2a/g}$, $2\pi\sqrt{3a/2g}$

5.13 $5g/7$

5.17 Quando a linha dos centros faz um ângulo $\cos^{-1}(4/7)$ com a vertical

5.19 (a) Horizontal: $(3/4)mg\operatorname{sen}\theta(3\cos\theta - 2)$
Vertical: $(1/4)mg(3\cos\theta - 1)^2$
(b) O escorregamento começa quando
$|3\operatorname{sen}\theta(3\cos\theta - 2)| = \mu(3\cos\theta - 1)^2$

5.21 $S = v_0 t - (gt^2/2)(\operatorname{sen}\theta + \mu\cos\theta)$
o rolamento puro acontece quando
$S = (2v_0^2/g)(\operatorname{sen}\theta + 6\mu\cos\theta)(2\operatorname{sen}\theta + 7\mu\cos\theta)^{-2}$

5.25 $v_{cm1} = -\hat{p}/4m$, $\omega_1 = -3\hat{p}/2ml$
$v_{cm2} = 5\hat{p}/4m$, $\omega_2 = 9\hat{p}/ml$
$v_B = -\hat{p}/m$